Uvod u funkcionalnu analizu

(Predavanja 2008/2009)

February 2, 2009

Sadržaj

Glava 1

Metrički prostori

Granični proces jedan je od najvažnijih pojmova matematičke analize. Fakat na kome počiva ovaj pojam jeste da smo u mogućnosti mjeriti rastojanje izmedju proizvoljne dvije tačke realne prave. Šta više, veliki broj pojmova analize nije vezan za algebarska svojstva skupa nego upravo za koncept udaljenosti. Ovo nas navodi na izučavanje skupova u kojima je moguće mjeriti rastojanje izmedju tačaka, tj. vodi nas ka konceptu "metričkog prostora", fundamentalnog pojma moderne matematike.

1.1 Metrika i metrički prostor

Definicija 1.1.1. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Za funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}$ kažemo da je metrika ili metrička funkcija na X, ako zadovoljava sljedeća četiri uslova, za proizvoljne x, y i z iz X:*

M1. $d(x, y) \geq 0$,

M2. $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako* $x = y$,

M3. $d(x, y) = d(y, x)$,

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tada kažemo da je skup X snabdjeven metrikom d i nazivamo ga metrički prostor. Elemente skupa X nazivamo tačkama, a realan broj $d(x, y)$ nazivamo rastojanjem izmedju tačaka x i y.

Dakle, metrički prostor je uredjeni par (X, d), koga čine skup X i na njemu uvedena metrika d. Kratkoće radi, umjesto oznake (X, d), mi ćemo za metrički prostor skoro uvijek koristiti jednostavno oznaku X, kad god je jasno o kojoj je metrici riječ.

Uslovi M1.-M4. nazivaju se aksiomi metrike, a pojedinačno to su *pozitivna definitnost* (M1.), *strogost* (M2.), *simetričnost* (M3.) i *nejednakost trougla* (M4.).

Ukoliko uslov $M2.$ zamijenimo slabijim uslovom

$$x = y \text{ onda } d(x, y) = 0 \ ,$$

za d kažemo da je *pseudometrika*. Ukoliko se iz aksioma ispusti uslov $M3.$, za d kažemo da je *kvazimetrika*. Na kraju, ako uslov $M4.$ zamjenimo sa uslovom

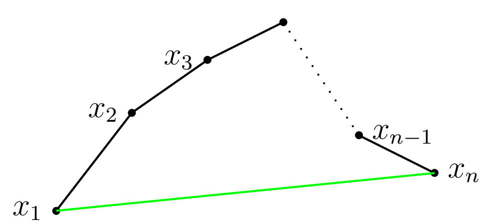
$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \ ,$$

d nazivamo *ultrametrikom*.

Lema 1.1.1. *U svakom metričkom prostoru* (X, d) *vrijedi pravilo mnogougla, tj. za proizvoljne* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *(*$n \geq 3$*), vrijedi*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \ .$$

Dokaz : Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. ♣



Slika 1.1: Pravilo mnogougla

Lema 1.1.2. *Za proizvoljne tri tačke* x, y, z*, metričkog prostora* (X, d)*, vrijedi nejednakost*

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \ .$$

Lema 1.1.3. *Za proizvoljne četiri tačke* x, y, z *i* t*, metričkog prostora* (X, d)*, vrijedi nejednakost*

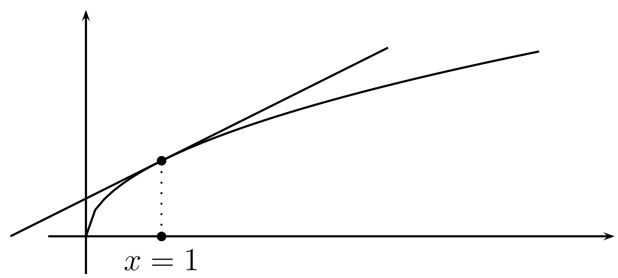
$$|d(x, z) - d(y, t)| \leq d(x, y) + d(z, t) \ .$$

Prije nego što navedemo neke značajnije primjere metričkih prostora, navedimo dvije važne nejednakosti. Prvo pokažimo sljedeće pomoćno tvrdjenje.

Lema 1.1.4. *Neka su $a, b \geq 0$ i neka je za $p > 1$, broj q odredjen tako da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada vrijedi*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ .$$

Dokaz : Neka je $0 < m < 1$. Posmatrajmo funkcije oblika $f(x) = x^m$, definisane za $x \geq 0$. Kako je $f''(x) = m(m-1)x^{m-2} \leq 0$, to je za proizvoljno $0 < m < 1$, funkcija $f(x)$ konveksna na dole, što geometrijski znači da se ona nalazi ispod svoje tangente.



Tangenta na posmatranu krivu u tački $x = 1$ je $y = m(x-1) + 1$, pa na osnovu rečenog vrijedi

$$x^m \leq m(x-1) + 1 \ .$$

Stavimo li u gornju nejednakost da je $x = \frac{a^p}{b^q}$ i $m = \frac{1}{p}$, nakon kraćeg računa dobijamo traženu nejednakost. ♣

Teorem 1.1.5 (Nejednakost Höldera). *Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, ..., n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je za realan broj $p > 1$, broj q definisan sa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ .$$

Dokaz : Označimo sa $a_i' = \frac{a_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ i $b_i' = \frac{b_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ ($i = 1, 2, ..., n$). Očigledno vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i'|^p = \sum_{i=1}^{n} |b_i'|^q = 1 \ . \tag{1.1}$$

Za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$, za brojeve $|a'_i|$ i $|b'_i|$ vrijedi Lema 1.1.4, tj.

$$|a'_i b'_i| \leq \frac{|a'_i|^p}{p} + \frac{|b'_i|^q}{q} \ , \tag{1.2}$$

gdje p i q zadovoljavaju uslove teoreme. Sumiranjem po $i = 1, 2, ..., n$ lijeve i desne strane u (1.2), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} |a'_i b'_i| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} |a'_i|^p}{p} + \frac{\sum_{i=1}^{n} |b'_i|^q}{q} \ .$$

Sada na osnovu (1.1) slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |a'_i b'_i| \leq 1 \ . \tag{1.3}$$

S druge strane je

$$\sum_{i=1}^{n} |a'_i b'_i| = \frac{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \ . \tag{1.4}$$

Iz (1.3) i (1.4) imamo traženu nejednakost. ♣

Pozitivni realni brojevi p i q koji zadovoljavaju uslov $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, nazivaju se konjugovani brojevi, a specijalno ako je $p = q = 2$, gornja nejednakost se naziva Cauchy-Schwarzova nejednakost.

Teorem 1.1.6 (Nejednakost Minkowskog). *Neka su a_i i b_i ($i = 1, 2, ..., n$) proizvoljni realni ili kompleksni brojevi i neka je $p \geq 1$. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

Dokaz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p &= \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i||a_i + b_i|^{p-1} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i||a_i + b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i||a_i + b_i|^{p-1} \ . \end{aligned}$$

Primjenjujući Hölderovu nejednakost na obje gornje sume na desnoj strani nejednakosti, dobijamo nejdnakost

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \le \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Dijeleći ovu nejednakost sa izrazom u drugoj zagradi desne strane i koristeći činjenicu da je $(p-1)q=p$ i $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, dobijamo traženu nejednakost.

♣

Obje ove nejednakosti imaju i svoj integralni oblik. Naime, vrijedi

$$\int_a^b |x(t)y(t)|dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} ,$$

odnosno

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Navedimo sada neke značajnije metričke prostore.

Primjer 1.1. Neka je X proizvoljan skup i neka je za $x,y\in X$ zadato

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=y \ , \\ 1 & ; \quad x\ne y \ . \end{cases}$$

Funkcija d jeste metrika i (X,d) nazivamo diskretni metrički prostor. ♢

Primjer 1.2. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa rastojanjem

$$d(x,y)=|x-y| \ ,$$

predstavlja dobro nam poznati Euklidov prostor realne prave. ♢

Primjer 1.3. Sa $\mathbb{R}^n$ označavamo skup svih uredjenih n-torki realnih brojeva $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Metriku možemo uvesti sa

1. $d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. $d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $(p \geq 1)$.

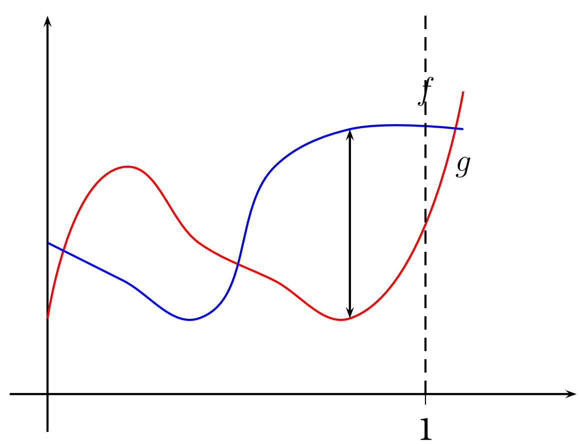
3. $d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$

Ovim primjerom opravdavamo činjenicu da je nekada neophodno koristiti definiciju metričkog prostora kao uredjenog para, jer kao što vidimo, na istom skupu se mogu zadati različite metrike. $\diamondsuit$

Primjer 1.4. Sa $C[a,b]$ označavamo skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a,b]$. Ako uvedemo funkciju

$$d(f,g) = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t) - g(t)| \ ,$$

za proizvoljne $f, g \in C[a,b]$, dobijamo metrički prostor neprekidnih funkcija, koga kraće uobičajeno pišemo samo sa $C[a,b]$.



$\diamondsuit$

Primjer 1.5. Na skupu $C[a,b]$ metriku možemo uvesti i sa

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

i tada imamo prostor neprekidnih funkcija sa tzv. kvadratnom metrikom. $\diamondsuit$

Primjer 1.6. Skup svih konvergentnih nizova označavamo sa c i ako uvedemo

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ ,$$

gdje su $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljni nizovi iz c, on postaje metrički prostor. $\diamondsuit$

Primjer 1.7. Skup svih nula nizova označavamo sa c_0 i na njemu možemo zadati metriku sa

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.8. Za proizvoljno $1 \leq p < +\infty$, sa l_p označavamo skup svih nizova sumabilnih sa stepenom p, tj. beskonačnih nizova $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, za koje važi $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty$. Standardna metrika na datom skupu zadata je sa

$$d(x,y) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.9. Sa l_∞ označavamo skup svih ograničenih nizova. Metrika je data sa

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.10. Skup Lebesgue integrabilnih funkcija sa p-tim stepenom ($1 \leq p < +\infty$) nad oblasti Ω, označavamo sa $L_p(\Omega)$ i metrika je data sa

$$d(x,y) = \left(\int_\Omega |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

$\diamondsuit$

Primjer 1.11. Neka je na skupu $\mathbb{R}^2$ zadata funkcija

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad d(x,y) = |x_1 - y_1| \ .$$

Nije teško provjeriti da funkcija d zadovoljava uslove M1, M3 i M4, ali ne i uslov M2. Naime, sve tačke iz $\mathbb{R}^2$ sa istim prvim koordinatama imaju ”udaljenost” nula i pri tome nemoraju obavezno biti iste. Dakle d nije metrika ali je zadovoljen uslov: $x = y \Rightarrow d(x,y) = 0$, pa je $(\mathbb{R}^2, d)$ primjer pseudometričkog prostora. $\diamondsuit$

Sa pojmom metričke funkcije sada smo u mogućnosti mjeriti i druga rastojanja.

Definicija 1.1.2. *Neka je x tačka metričkog prostora (X, d) i neka je $A \subseteq X$. Udaljenost tačke x od skupa A predstavlja*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y)|\ y \in A\}\ .$$

Gornja definicija je korektna jer ako je A neprazan skup, onda je i skup $\{d(x, y)|\ y \in A\}$ neprazan i očigledno zbog osobine M1, ograničen odozdo, pa infimum postoji. Jasno je da ako $x \in A$ onda je $d(x, A) = 0$. Medjutim, ako je $d(x, A) = 0$ ne mora biti $x \in A$, što pokazuje primjer $x = 0$ i $A = (0, 1)$.

Lema 1.1.7. *Za proizvoljan neprazan podskup A i proizvoljne tačke x i y metričkog prostora (X, d) vrijedi*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)\ .$$

Dokaz : Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan realan broj. Označimo sa $a = d(x, A)$ i sa $b = d(y, A)$. Na osnovu definicije infimuma skupa, postoji $t \in A$, takav da je $d(y, t) \leq b + \varepsilon$. Sada na osnovu Leme 1.1.3, za svako $s \in A$ imamo

$$d(x, s) - b \leq d(x, s) - d(y, t) + \varepsilon \leq d(x, y) + d(s, t) + \varepsilon\ . \tag{1.5}$$

Označimo sa

$$M = \{d(x, s) - b|\ s \in A\}\quad ,\quad N = \{d(x, y) + d(s, t) + \varepsilon|\ s \in A\}\ .$$

Jasno je, na osnovu (1.5), da vrijedi $\inf M \leq \inf N$. Ako u 1.5 stavimo $s = t$, vidimo da je broj $d(x, y) + \varepsilon$ u skupu N, pa onda vrijedi i $\inf M \leq d(x, y) + \varepsilon$. Kako ovo vrijedi za proizvoljno $\varepsilon > 0$ to onda vrijedi i

$$a - b \leq d(x, y)\ .$$

Kako gornje razmatranje možemo u potpunosti iskoristiti zamjenjujući mjesta tačkama x i y, to vrijedi i

$$b - a \leq d(x, y)\ ,$$

čime je iskazana tvrdnja dokazana. ♣

Definicija 1.1.3. *Neka su A i B neprazni podskupovi metričkog prostora (X, d). Rastojanje izmedju skupova A i B definišemo sa*

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y)|x \in A,\ y \in B\} .$$

Korektnost i ove definicije objašnjavamo na isti način kao maloprije. Ako se skupovi sijeku, jasno je da vrijedi $d(A, B) = 0$. Medjutim, ako je $d(A, B) = 0$ to ne znači da je presjek skupova neprazan. Npr. ako je $A = (0, 1)$, a $B = (1, 2)$, tada je $d(A, B) = 0$ i $A \cap B = \emptyset$.

Neka je sada (X, d) proizvoljan metrički prostor i neka je $Y \subset X$. Kako $d : X \times X \to \mathbb{R}$, možemo posmatrati njenu restrikciju $d|_{Y\times Y}$, koja tada predstavlja metriku na skupu Y, a time smo dobili novi metrički prostor $(Y, d|_{Y\times Y})$, ili jednostavno (Y, d), koga nazivamo metrički potprostor metričkog prostora (X, d).

Definicija 1.1.4. *Za skup A, podskup metričkog prostora (X, d), kažemo da je ograničen ili omedjen ako je skup rastojanja medju tačkama tog skupa ograničen skup, tj.*

$$(\exists C > 0)(\forall x, y \in A)\ 0 \leq d(x, y) \leq C .$$

Primjer 1.12. Jedinični krug $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2|x^2 + y^2 \leq 1\}$ je ograničen skup u $(\mathbb{R}^2, d_2)$. $\diamondsuit$

Definicija 1.1.5. *Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Nenegativan broj*

$$diamA = \sup\{d(x, y)|\ x, y \in A\} ,$$

nazivamo dijametrom skupa A.

Jasno je da ako vrijedi $diamA = \infty$, da je skup neograničen, tj. vrijedi

Lema 1.1.8. *Skup je ograničen ako i samo ako mu je dijametar konačan.*

Teorem 1.1.9. *Za proizvoljna dva podskupa A i B metričkog prostora (X, d) vrijedi*

$$diam(A \cup B) \leq diamA + diamB + d(A, B) .$$

Kao direktnu posljedicu gornjeg tvrdjenja imamo

Posljedica 1.1.10. *Unija konačno mnogo ograničenih skupova je ograničen skup.*

Definicija 1.1.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za proizvoljno $a \in X$ i za proizvoljno $r > 0$ skup*

$$B(a, r) = \{x \in X|\ d(a, x) < r\}$$

nazivamo otvorena kugla u X sa centrom u tački a, poluprečnika r.

Skup

$$K(x, r) = \{x \in X|\ d(a, x) \leq r\}$$

nazivamo zatvorena kugla centra a i poluprečnika r, a skup

$$S(x, r) = \{x \in X|\ d(a, x) = r\}$$

nazivamo sfera centra u a, poluprečnika r.

Lema 1.1.11. *Otvorena kugla u metričkom prostoru ima sljedeće osobine:*

1. $x \in B(x, r)$.
2. $B(x, r_1) \cap B(x, r_2) = B(x, \min\{r_1, r_2\})$.
3. $y \in B(x, r) \ \Rightarrow\ B(y, r - d(x, y)) \subset B(x, r)$.

Definicija 1.1.7. *Za skup G podskup metričkog prostora (X, d), kažemo da je otvoren ako vrijedi*

$$(\forall x \in G)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subseteq G\ .$$

Definicija 1.1.8. *Skup je zatvoren ako je njegov komplement otvoren skup.*

Teorem 1.1.12. *Neka je (X, d) metrički prostor. Kolekcija $\mathcal{T}$ svih otvorenih podskupova od X ima sljedeće osobine.*

1. $\varnothing,\ X \in \mathcal{T}$.
2. $U, V \in \mathcal{T}$ *onda* $U \cap V \in \mathcal{T}$.
3. $(\forall i \in I) O_i \in \mathcal{T} \ \Rightarrow\ \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.
4. $(\forall x, y \in X,\ x \neq y)(\exists U, V \in \mathcal{T})(x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing)$.

Familija $\mathcal{T}$ koja zadovoljava osobine 1., 2. i 3. naziva se topologija na X, a ako zadovoljava još i osobinu 4., naziva se Hausdorffova topologija na X.

Definicija 1.1.9. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je $A \subseteq X$. Najmanji u smislu inkluzije, zatvoreni skup koji sadrži skup A, nazivamo zatvorenje ili adherencija skupa A i označavamo ga sa $\overline{A}$.*

Nije teško vidjeti da vrijedi

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subseteq X |\ F \text{ zatvoren i } A \subseteq F\}.$$

Lema 1.1.13. *Neka su A i B proizvoljni podskupovi metričkog prostora X. Vrijedi,*

1. $A \subseteq \overline{A}$.
2. *Zatvorenje je zatvoren skup.*
3. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$
4. $A \subset B \ \Rightarrow\ \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Definicija 1.1.10. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je neprekidno u tački $x_0 \in X$ ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(x)) < \varepsilon)\ .$$

Preslikavanje je neprekidno na X ako je neprekidno u svakoj tački $x \in X$.

Teorem 1.1.14. *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$. Sljedeća tvrdjenja su ekvivalentna.*

1. *f je neprekidna na X.*
2. $(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.
3. *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X.*

Dokaz : ($1. \Rightarrow 2.$)
Neka je f neprekidna funkcija. Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Tada vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)\ .$$

Drugačije rečeno, vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ (x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon))\ ,$$

odnosno

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)\ (f(x) \in f\left(B(x_0,\delta)\right)) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0),\varepsilon)\ ,$$

ili u skupovnom obliku ovo znači

$$f\left(B(x_0,\delta)\right)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)\ .$$

Primjetimo da smo u svim koracima koristili ekvivalencije, tj. vrijedi i $(2. \Rightarrow 1.)$

$(2. \Rightarrow 3.)$
Neka vrijedi iskaz 2. i neka je V proizvoljan neprazan otvoren skup u Y. Neka je $x \in f^{-1}(V)$ proizvoljan. To znači da je $f(x) \in V$, a zbog otvorenosti skupa V, postoji $\varepsilon > 0$, takav da je $B(f(x),\varepsilon) \subseteq V$. Na osnovu 2., za takav ε postoji $\delta > 0$, tako da vrijedi

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon) \subseteq V\ .$$

Primjenimo li poznate nam stvari iz preslikavanja, imamo

$$B(x,\delta) \subseteq f^{-1} \circ f(B(x,\delta)) \subseteq f^{-1}(V)\ .$$

Dakle za proizvoljan $x \in f^(V)$, postoji kugla $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(V)$, pa je $f^{-1}(V)$ otvoren skup.

$(3. \Rightarrow 2.)$
Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Tada je $B(f(x),\varepsilon)$ otvoren skup i $f(x) \in B(f(x),\varepsilon)$. Na osnovu 3. je onda i $f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$ otvoren skup. Osim toga je $x = f^{-1} \circ f(x) \in f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$, pa zbog otvorenosti, postoji $\delta > 0$, takav da je $B(x,\delta) \subseteq f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$. Iz posljednjeg onda imamo

$$f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)\ .$$

♣

1.2 Konvergencija u metričkim prostorima

Definicija 1.2.1. *Neka je (X,d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da konvergira ka $x_0 \in X$, ako vrijedi*

$$d(x_n,x_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ .$$

Činjenicu da niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka tački x_0, uobičajeno zapisujemo sa $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ili

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ .$$

Gore definisanu konvergenciju nazivamo *konvergencija po metrici* jer kao što ćemo vidjeti, izučavat ćemo i neke druge vrste konvergencija.

Lema 1.2.1. *Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u metričkom prostoru (X,d). Sljedeća dva tvrdjenja su ekvivalentna.*

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.
2. *Za svako $\varepsilon > 0$, postoji samo konačno mnogo članova niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji se nalaze van kugle $B(x_0,\varepsilon)$.*

Lema 1.2.2. *Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ takav da $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tada $x_0 \in F$.*

Definicija 1.2.2. *Neka je (X,d) metrički prostor. Tačku $x \in A \subseteq X$ nazivamo izolovanom tačkom skupa A ako postoji okolina tačke x u kojoj osim tačke x nema drugih tačaka iz skupa A.*

Definicija 1.2.3. *Tačka $x \in X$ je tačka nagomilavanja skupa A ako se u svakoj okolini tačke x nalazi bar jedna tačka skupa A različita od x.*
Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A nazivamo izvodni skup i označavamo ga sa A'.

Lema 1.2.3. *Neka je A proizvoljan podskup metričkog prostora (X,d). Tada vrijedi,*

$$\overline{A} = \{x \in X \mid (\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A) \ \lim_{n\to\infty} x_n = x\} \ .$$

Kao posljedicu gornje leme imamo

Posljedica 1.2.4. *Svaka adherentna tačka skupa A je ili tačka nagomilavanja ili izolovana tačka.*

Sada možemo dati kompletnu karakterizaciju zatvorenja nekog skupa. Naime, za proizvoljan skup A, tačke skupa $\overline{A}$ su:

- izolovane tačke skupa A,

- Tačke nagomilavanja skupa A koje pripadaju skupu A i
- tačke nagomilavanja skupa A koje ne pripadaju skupu A.

Drugačije rečeno vrijedi,

$$\overline{A} = A \cup A' \ .$$

Teorem 1.2.5. *Konvergentan niz može konvergirati samo jednoj tački.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ za koga vrijedi $x_n \to x'$ i $x_n \to x''$ $(n \to \infty)$. Na osnovu relacije trougla imamo

$$0 \le d(x', x'') \le d(x', x_n) + d(x_n, x'') \ ,$$

za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Desna strana teži 0 kada $n \to \infty$, pa očigledno mora vrijediti $d(x', x'') = 0$, odnosno $x' = x''$. ♣

Teorem 1.2.6. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ i neka $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Uzimajući da je $\varepsilon = 1$, imamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za svako $n \ge n_0$, vrijedi

$$d(x_n, x_0) < 1 \ .$$

Označimo sa $R' = \max\{d(x_0, x_1), d(x_0, x_2), ..., d(x_0, x_{n_0-1})\}$. Neka je sada $R = R' + 1$. Tada očigledno vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ x_n \in B(x_0, R) \ ,$$

tj. niz je ograničen. ♣

Teorem 1.2.7. *Metrička funkcija je neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Dokaz : Neka je (X, d) proizvoljan metrički prostor i neka su $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, takvi da $x_n \to x_0$ i $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$. Koristeći Lemu 1.1.3, imamo

$$|d(x_n, y_n) - d(x_0, y_0)| \le d(y_n, y_0) + d(x_n, x_0) \to 0 \ (n \to \infty) \ ,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0) \ .$$

♣

Definicija 1.2.4. *Neka su* (X, d_X) *i* (Y, d_Y) *metrički prostori i neka je* $f : X \to Y$*. Za preslikavanje* f *kažemo da je izometrija iz* X *u* Y *ako je injektivno preslikavanje i ako vrijedi*

$$(\forall x', x'' \in X)\ d_Y(f(x'), f(x'')) = d_X(x', x'')\ .$$

Ako postoji izometrija iz X u Y, kažemo da se X može izometrički smjestiti ili uložiti u Y. Sa stanovišta teorije metričkih prostora, tj. ako nas interesuje samo odnos izmedju objekata (udaljenost), a ne i vrsta objekata, onda ne pravimo razliku izmedju prostora X i njegove izometričke slike $f(X) \subseteq Y$ i prosto pišemo $X \subseteq Y$.

1.3 Kompletnost metričkih prostora

Definicija 1.3.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ kažemo da je Cauchyjev niz ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \ \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ .$$

Drugačije rečeno, niz je Cauchyjev ako vrijedi

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \ .$$

Primjer 1.13. Posmatrajmo niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0, 1]$, zadat sa $f_n(t) = t^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
Za proizvoljno fiksno $t \in [0, 1)$ i za $n, m \in \mathbb{N}$ (neka je npr. $n < m$) imamo

$$f_n(t) - f_m(t) = t^n - t^m = t^n(1 - t^{m-n}) \leq t^n \ .$$

Puštajući da n teži u beskonačnost, desna strana teži ka 0, pa zbog proizvoljnosti $t \in [0, 1)$, zaključujemo

$$d(f_n, f_m) = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ .$$

(Očigledno je gornje tačno i za $t = 1$) Dakle, posmatrani niz je Cauchyjev. ♢

Teorem 1.3.1. *Svaki Cauchyjev niz je ograničen.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz. Na osnovu definicije Cauchyjevog niza, stavljajući $n = n_0$ imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall m \geq n_0) \ d(x_m, x_{n_0}) < \varepsilon \ .$$

Ovo znači da se svi članovi niza, osim njih konačno mnogo, nalaze u kugli $B(x_{n_0}, \varepsilon)$. Označimo sa

$$R = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), ..., d(x_{n_0-1}, x_{n_0})\} \ .$$

Jasno je sada da za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \in B(x_{n_0}, R + \varepsilon)$, tj. niz je ograničen. ♣

Teorem 1.3.2. *Svaki konvergentan niz je Cauchyjev.*

Dokaz : Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan niz i neka $x_n \to x$ ($n \to \infty$). Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Na osnovu definicije konvergencije imamo

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2})\ .$$

Neka su sada $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $m, n \geq n_0$. Tada je

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon\ ,$$

a ovo znači da je niz Cauchyjev. ♣

Da Cauchyjev niz nemora biti konvergentan, dovoljno je posmatrati niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$, gdje je x_n decimalni zapis broja $\sqrt{2}$ na n decimala.
Jasno je da niz nije konvergentan u $\mathbb{Q}$, tj. $x_n \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Medjutim, očigledno je za $n > m$, $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{10^n} \to 0$ kada $n, m \to \infty$, tj. niz je Cauchyjev.

Definicija 1.3.2. *Za metrički prostor u kome je svaki Cauchyjev niz konvergentan kažemo da je kompletan ili potpun metrički prostor.*

Iz matematičke analize su nam poznati Cauchyjevi principi konvergencije nizova i redova. Taj princip za nizove se sada može iskazati ovako:
Svaki realan Cauchyjev niz je konvergentan ,
a to nije ništa drugo nego činjenica da je skup realnih brojeva sa uobičajenom metrikom, kompletan metrički prostor.
Ispitivati osobinu kompletnosti po definiciji za neki metrički prostor, nije baš praktičan način, pa otuda navodimo jednu karakterizaciju ove osobine.

Teorem 1.3.3. *Metrički prostor (X, d) je kompletan ako i samo ako presjek proizvoljnog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli, čiji niz dijametara teži ka 0, sadrži tačno jednu tačku.*

Dokaz : ($\Rightarrow$)
Neka je X kompletan metrički prostor. Posmatrajmo proizvoljan niz zatvorenih kugli $K_n = K(x_n, r_n)$ koji zadovoljava osobine

- $(\forall n \in \mathbb{N})\ K_n \supseteq K_{n+1}$,
- $r_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $m > n$. Tada je $K_m = K(x_m, r_m) \subset K_n = K(x_n, r_n)$, pa očigledno vrijedi $d(x_m, x_n) < r_n$. Kako $r_n \to 0$, jasno je da niz centara posmatranih kugli predstavlja Cauchyjev niz u X, a zbog kompletnosti on je i konvergentan. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ .$$

Pokažimo sada da $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ sve tačke niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sem njih konačno mnogo, leže u kugli K_k, pa je x tačka nagomilavanja skupa K_k. Kako je K_k zatvoren skup, to on sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Dakle vrijedi,

$$(\forall k \in \mathbb{N})\ x \in K_k \ ,$$

tj. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.
Ako bi postojala i neka tačka x' sa istom osobinom, tada bi imali $0 \leq d(x, x') \leq r_n$, a kako $r_n \to 0$, moralo bi biti $x = x'$, čime je jedinstvenost pokazana.

($\Leftarrow$)
Pretpostavimo da X nije kompletan metrički prostor. To znači da u njemu postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji jeste Cauchyjev ali nije konvergentan. Kako je to Cauchyjev niz, to onda za svako $i \in \mathbb{N}$, postoji $n_i \in \mathbb{N}$, takvav da vrijedi

$$(\forall m > n_i) d(x_m, x_{n_i}) < \frac{1}{2^i} \ , \ (i = 1, 2, ...) \ .$$

Za ovako odabrane n_i ($i \in \mathbb{N}$), posmatrajmo zatvorene kugle

$$K_i = K\left(x_{n_i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right) \ .$$

Očigledno niz poluprečnika ovih kugli teži ka 0.
Ako je $x \in K_{i+1}$, tada je

$$\begin{aligned} d(x, x_{n_i}) &\leq d(x, x_{n_{i+1}}) + d(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) \\ &< \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} \\ &< 2\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}, \end{aligned}$$

tj. $x \in K_i$. Dakle, $K_{i+1} \subset K_i$, za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$.
Na ovaj način smo formirali monotono opadajući niz zatvorenih kugli čiji niz dijametara teži ka 0. Pretpostavimo sada da postoji

$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ovo bi značilo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $d(x, x_{n_i}) < \frac{1}{2^{i-1}}$.
Neka je sada za fiksno $i \in \mathbb{N}$, $m > n_i$ proizvoljan. Onda je

$$d(x_m, x) \leq d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) < \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i} \ ,$$

a ovo bi značilo da je naš polazni niz konvergentan što bi bila kontradikcija. Dakle, mora biti $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \varnothing$.
Kontrapozicijom imamo traženo tvrdjenje. ♣

Teorem 1.3.4. *Svaki zatvoren potprostor kompletnog metričkog prostora je kompletan metrički prostor za sebe.*

Dokaz : Neka je A zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora (X, d). Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ Cauchyjev niz (u metričkom potprostoru (A, d)). Tada je taj niz Cauchyjev i u X, pa zbog kompletnosti on je i konvergentan, tj. $x_n \to x_0 \in X$ ($n \to \infty$). Tačka x_0 je tada ili tačka nagomilavanja skupa $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, ili se beskonačno mnogo puta pojavljuje kao element niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. U prvom slučaju zbog zatvorenosti skupa A zaključujemo da $x_0 \in A$, a u drugom slučaju, zbog $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, ponovo zaključujemo da $x_0 \in A$. ♣

Primjer 1.14. Neka je $1 \leq p < \infty$. Prostor l_p je kompletan metrički prostor.

Neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u l_p. Tada vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow \ d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ ,$$

odnosno, s obzirom na metriku u l_p,

$$d(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{4}} \ . \tag{1.6}$$

Posmatramo li samo jedan sabirak sume iz (1.6), imamo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$ vrjedi

$$|\xi_i^n - \xi_i^m| \leq d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{4}} \ ,$$

pa zaključujemo da za proizvoljno $i \in \mathbb{N}$, niz $(\xi_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz i to u $\mathbb{R}$, a zbog kompletnosti $\mathbb{R}$, on je i konvergentan niz. Neka je

$$\xi_i^n \to \ \xi_i \ , \ (n \to \infty) \ \ ; \ \ i \in \mathbb{N} \ .$$

Posmatrajmo sada na ovaj način konstruisan niz $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Polazni niz (x_n) je kao Cauchyjev ograničen niz, pa vrijedi

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ d(x_n, 0) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq R \ ,$$

tj. sadržan je u nekoj kugli centra 0 poluprečnika R. Tim prije je onda

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i^n|^p \leq R^p \ .$$

Zbog konačne sume, sada ako u posljednjoj nejednakosti pustimo da $n \to \infty$, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^p \leq R^p \ .$$

Dakle, niz parcijalnih suma reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^p$ je ograničen, a zbog monotonosti onda zaključujemo da je dati red konvergentan, odnosno

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|^p < \infty \ ,$$

što znači da je niz $x \in l_p$.

Iz (1.6) takodje imamo da za $n, m \geq n_0$ i za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i^m|^p < \frac{\varepsilon^p}{4} \ .$$

Držeći n čvrstim i puštajući da $m \to \infty$, slijedi

$$\sum_{i=1}^{k} |\xi_i^n - \xi_i|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{4} < \frac{\varepsilon^p}{2} \ .$$

Rezonujući slično kao malo prije, sada imamo da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^n - \xi_i|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2} < \varepsilon^p \ .$$

Ovo u stvari znači da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za svaki prirodan broj $n \geq n_0$, vrijedi $d(x_n, x) < \varepsilon$. Dakle, niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan u l_p, pa zbog njegove proizvoljnosti imamo kompletnost prostora. $\diamondsuit$

Definicija 1.3.3. *Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je gust u skupu $B \subseteq X$ ako vrijedi $B \subseteq \overline{A}$.*
Ako je $\overline{A} = X$, onda kažemo da je A svuda gust u X.

Drugačije rečeno, skup A je gust u skupu B ako se u svakoj okolini proizvoljne tačke iz B nalazi bar jedna tačka skupa A.

Primjer 1.15. Skup $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$. Ova činjenica nam je poznata još iz matematičke analize, a oslanja se na stav da izmedju svaka dva različita realna broja, postoji racionalan broj. $\diamondsuit$

Primjer 1.16. U prostoru $C[a,b]$, skup funkcija

$$f_0(t) = 1,\ f_1(t) = t,\ f_2(t) = t^2,\ \dots,\ f_n(t) = t^n,\ \dots$$

je svuda gust skup. I ova činjenica je poznata iz matematičke analize. Ona je bazirana na činjenici da se svaka neprekidna funkcija može razložiti u red, tj.

$$f \in C[a,b]\ ,\ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} t^n\ ,$$

a to je ustvari Taylorov teorem. $\diamondsuit$

Definicija 1.3.4. *Skup $A \subseteq X$ je nigdje gust skup u X ako njegova adherencija ne sadrži niti jednu kuglu.*

Skup A je nigdje gust ako $\overline{A}$ nema unutrašnjih tačaka.

Primjer 1.17. Skup $\mathbb{N}$ je nigdje gust u $\mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Činjenica da metrički prostor nije kompletan, kao što ćemo vidjeti, nije puno otežavajuća. Naime vrijedi

Teorem 1.3.5. ***(Teorem o kompletiranju)***
Za svaki metrički prostor X, postoji kompletan metrički prostor $\overline{X}$, takav da je

1. *$X \subseteq \overline{X}$ (tj. X se može izometrički smjestiti u $\overline{X}$).*

2. *X je svuda gust u $\overline{X}$.*

Dokaz : Označimo sa X_1 skup svih Cauchyjevih nizova prostora X. Na X_1 uvedimo relaciju

$$(x_n) \sim (y_n) \overset{def}{\Leftrightarrow} d(x_n, y_n) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ .$$

Lahko se pokazuje da za ovako uvedenu relaciju vrijede osobine

- $(\forall (x_n) \in X_1)(x_n) \sim (x_n)$.
- $(\forall (x_n), (y_n) \in X_1)(x_n) \sim (y_n) \Rightarrow (y_n) \sim (x_n)$.
- $(\forall (x_n), (y_n), (z_n) \in X_1)(x_n) \sim (y_n) \wedge (y_n) \sim (z_n) \Rightarrow (x_n) \sim (z_n)$.

Dakle, uvedena relacija je relacija ekvivalencije na X_1, te ona razbija skup X_1 na klase ekvivalencije. Označimo količnički skup sa $X_1/_\sim = \overline{X}$, čije elemente ćemo označavati slovima ξ, η, ζ i slično.

Definišimo za proizvoljne $\xi, \eta \in \overline{X}$, sljedeću funkciju,

$$d(\xi, \eta) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ , \tag{1.7}$$

gdje su $(x_n) \in \xi$ i $(y_n) \in \eta$. Ispitati korektnost gornje definicije znači pokazati da limes na desnoj strani postoji i konačan je i da on ne ovisi o izboru predstavnika klasa ekvivalencije.
Neka su $(x_n) \in \xi$ i $(y_n) \in \eta$. Na osnovu nejednakosti trougla i na osnovu Leme 1.1.3 imamo

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_n)| + |d(x_m, y_n) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \ . \end{aligned}$$

Kako radimo sa Cauchyjevim nizovima, to desna strana teži ka 0 kada pustimo da $n, m \to \infty$. Ovo znači da je niz $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako se on nalazi u $\mathbb{R}$, on je i konvergentan, a to znači da limes postoji.

Neka su sada $(x'_n) \in \xi$ i $(y'_n) \in \eta)$ drugi predstavnici klasa. Tada je

$$d(x'_n, y'_n) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y'_n, y_n) \ .$$

Kako su $(x'_n), (x_n)$ i $(y'_n), (y_n)$ iz istih klasa, zaključujemo,

$$d(x'_n, y'_n) \leq d(x_n, y_n) \ . \tag{1.8}$$

Na isti način se pokazuje da mora biti

$$d(x_n, y_n) \leq d(x'_n, y'_n) \ . \tag{1.9}$$

Sad iz (1.8) i (1.9), zaključujemo da je vrijednost limesa neovisna o izboru predstavnika klase ekvivalencije.

Za vježbu ostavljamo da se pokaže da novouvedena funkcija d zadovoljava sljedeće osobine:

1. $d(\xi, \eta) \geq 0 \ , \ \xi, \eta \in \overline{X}$.

2. $d(\xi,\eta)=0 \Leftrightarrow \xi=\eta$.
3. Za proizvoljne $\xi,\eta\in\overline{X}$, $d(\xi,\eta)=d(\eta,\xi)$.
4. Za proizvoljne $\xi,\eta,\zeta\in\overline{X}$, $d(\xi,\zeta)\le d(\xi,\eta)+d(\eta,\zeta)$.

Gornje osobine znače da je ustvari d metrika na skupu $\overline{X}$.

Neka je sada $x\in X$ proizvoljan. Označimo sa ξ_x onu klasu ekvivalencije koja u sebi sadrži konstantni niz $(x,x,...,x,...)$. Na ovaj način smo definisali jedno preslikavanje $f:X\to\overline{X}$, zadato sa $f(x)=\xi_x$.
Za proizvoljne $x,y\in X$ sada imamo

$$d(f(x),f(y))=d(\xi_x,\xi_y)=\lim_{n\to\infty}d(x,y)=d(x,y)\ ,$$

a ovo ustvari znači da je f izometrija, pa na osnovu ranije rečenog, pišemo $X\subseteq\overline{X}$.

Pokažimo još drugu traženu osobinu, tj. da je X svuda gust u $\overline{X}$. Neka je $\xi\in\overline{X}$ proizvoljan i neka je $(x_n)\in\xi$ proizvoljan predstavnik te klase. Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan, pa kako je (x_n) Cauchyjev niz, postoji $n_0\in\mathbb{N}$, takav da je za proizvoljne prirodne $n,m\ge n_0$, $d(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}$. Za $n\ge n_0$, posmatrajmo klase ξ_{x_n}. Imamo

$$d(\xi_{x_n},\xi)=\lim_{m\to\infty}d(x_n,x_m)\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\ .$$

Dakle, za svako $\varepsilon>0$, postoji $n_0\in\mathbb{N}$, tako da je za proizvoljno prirodno $n\ge n_0$ zadovoljena relacija $d(\xi_{x_n},\xi)<\varepsilon$. Ali ovo ne znači ništa drugo do činjenicu da $\xi_{x_n}\to\xi$ ($n\to\infty$).
Kako je $f(x_n)=\xi_{x_n}$ i f je izometrija, ne pravimo razliku izmedju elemenata x_n i ξ_{x_n}. Zaključujemo da za $(x_n)\in\xi$, vrijedi

$$x_n\to\xi\ ,\ (n\to\infty)\ ,$$

a ovo znači da je X svuda gust u $\overline{X}$.

Ostaje nam još pokazati da je $\overline{X}$ kompletan prostor.
Neka je $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u $\overline{X}$. Kako je X svuda gust u $\overline{X}$ (tj. $f(X)$ zaista svuda gust u $\overline{X}$) to vrijedi

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\exists z_n\in X)d(z_n,\xi_n)<\frac{1}{n}\ . \tag{1.10}$$

Za ovako konstruisan niz imamo

$$\begin{aligned} d(z_n,z_m) &\le d(z_n,\xi_n)+d(\xi_n,\xi_m)+d(\xi_m,z_m)\\ &< \frac{1}{n}+d(\xi_n,\xi_m)+\frac{1}{m}\ . \end{aligned}$$

Kako je (ξ_n) Cauchyjev niz, to onda imamo

$$d(z_n, z_m) \to 0\ ,\ (n, m \to \infty)\ ,$$

odnosno, (z_n) je Cauchyjev niz u X. Neka je sada ξ_0 ona klasa ekvivalencije u $\overline{X}$ koja sadrži niz (z_n). Prema ranije pokazanom vrijedi

$$d(\xi_{z_n}, \xi_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ ,$$

tj.

$$d(z_n, \xi_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ . \tag{1.11}$$

Na osnovu toga je

$$0 \leq d(\xi_n, \xi_0) \leq d(\xi_n, z_n) + d(z_n, \xi_0)\ ,$$

a onda na osnovu (1.10) i (1.11) imamo

$$d(\xi_n, \xi_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ .$$

Dakle, Cauchyjev niz (ξ_n) je konvergentan, i zbog proizvoljnosti, $\overline{X}$ je kopletan metrički prostor. ♣

Ideju kompletiranja prostora lijepo možemo vidjeti u proširenju skupa racionalnih brojeva na skup realnih brojeva.

Definicija 1.3.5. *Za skup M podskup metričkog prostora X, kažemo da je skup prve kategorije u X ako se on može predstaviti kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova.*
Skup koji nije prve kategorije je skup druge kategorije.

Konačna unija nigdje gustih skupova je i sama nigdje gust skup, ali to nije tačno za prebrojivu uniju. Naime, $\mathbb{Q}$ se može predstaviti kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova (singltona) ali je to ipak svuda gust skup u $\mathbb{R}$.

Teorem 1.3.6 (Baireov teorem). *Kompletan metrički prostor je skup druge kategorije u sebi.*

Dokaz : Pretpostavimo da tvrdjenje nije tačno, tj. da postoji kompletan metrički prostor X koji je prve kategorije odnosno, koga možemo predstaviti kao prebrojivu uniju nigdje gustih skupova,

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\ ,\ X_i\ (i \in \mathbb{N}) \text{ nigdje gusti skupovi.}$$

Posmatrajmo proizvoljnu zatvorenu kuglu $K_0 = K(x_0, r_0)$ ($r_0 > 0$) u X. Kako je X_1 nigdje gust, to postoji kugla $K_1 = K(x_1, r_1)$, takva da vrijedi

$$K_1 \subset K_0 \ , \ X_1 \cap K_1 = \varnothing \ , \ r_1 < \frac{r_0}{2} \ .$$

Kako je i X_2 nigdje gust skup, postoji zatvorena kugla $K_2 = K(x_2, r_2)$, takva da je

$$K_2 \subset K_1 \ , \ X_2 \cap K_2 = \varnothing \ , \ r_2 < \frac{r_1}{2} \ .$$

Nastavljajući ovaj postupak konstriusali bismo niz zatvorenih kugli $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, za koje bi vrijedilo

- $K_{i+1} \subset K_i$, $i \in \mathbb{N}$.
- $X_i \cap K_i = \varnothing$, $i \in \mathbb{N}$.
- $r_i < \frac{r_{i-1}}{2} < \frac{r_0}{2^i}$.

Posmatrajmo sada niz $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, napravljen od centara definisanih kugli K_i ($i \in \mathbb{N}$). Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$, neka je npr. $m > n$, vrijedi

$$x_m \in K_m \subset K_n \ , \ x_n \in K_n \ ,$$

tj. $x_n, x_m \in K_n$, a to onda znači

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_n < 2\frac{r_0}{2^n} = \frac{r_0}{2^{n-1}} \ .$$

iz ovoga imamo očiglednu tvrdnju

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(n, m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon) \ ,$$

tj. niz (x_n) je Cauchyjev, a kako on leži u kompletnom metričkom prostoru X, on je i konvergentan. Dakle,

$$(\exists x_0 \in X) \ x_n \to x_0 \ (n \to \infty) \ .$$

Zbog prve osobine posmatranih kugli imamo da je tačka x_0, tačka nagomilavanja svake od kugli K_n ($n \in \mathbb{N}$), a zbog njihove zatvorenosti je onda $x_0 \in K_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Zbog toga i zbog druge osobine onda imamo da x_0 ne pripada niti jednom X_n ($n \in \mathbb{N}$), a to znači da

$$x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X \ ,$$

što je u suprotnosti sa ranije utvrdjenom činjenicom da je $x_0 \in X$.

Dakle, X jeste skup druge kategorije.

♣

1.4 Banachov stav o fiksnoj tački

Definicija 1.4.1. *Neka je $f : X \to X$ proizvoljno preslikavanje. Za tačku $x \in X$ kažemo da je fiksna tačka preslikavanja f, ako vrijedi $f(x) = x$.*

Primjer 1.18. Za preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadato sa $f(x) = x^3$, tačke $x = 1$ i $x = -1$ imaju osobinu $f(1) = 1$, odnosno $f(-1) = -1$, tj. one su fiksne tačke posmatranog preslikavanja. $\diamondsuit$

Primjer 1.19. Posmatrajmo preslikavanje $A : C[0,1] \to C[0,1]$, zadato sa

$$Af(x) = f(0) + \int_0^x f(t)dt \ .$$

Za funkciju $f(x) = e^x \in C[0,1]$, vrijedi

$$Af(x) = e^0 + \int_0^x e^t dt = 1 + e^x - 1 = e^x \ ,$$

tj. $f(x) = e^x$ je fiksna tačka preslikavanja A. $\diamondsuit$

Definicija 1.4.2. *Za preslikavanje $f : X \to X$ kažemo da je kontraktivno, ako postoji konstanta $q \in [0,1)$, takva da za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi*

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x,y) \ .$$

Primjer 1.20. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, zadata sa $f(x) = \arctan x$, na osnovu Lagrangeove teoreme zadovoljava

$$|\arctan x - \arctan y| = \frac{1}{1+\xi^2}|x-y| \ ,$$

za neko $\xi \in \mathbb{R}^+$ i za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}$. Stavimo da je $q = \frac{1}{1+\xi^2}$, jasno $q \in [0,1)$ i ako posmatramo standardnu metriku na $\mathbb{R}$, imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq qd(x,y) \ ,$$

tj. preslikavanje f je kontraktivno. $\diamondsuit$

Teorem 1.4.1. ***(Banachov stav o fiksnoj tački)***
Neka je $A : X \to X$ kontraktivno preslikavanje kompletnog metričkog prostora u samog sebe. Tada postoji tačno jedna fiksna tačka posmatranog preslikavanja.

Dokaz : Neka je $x_0 \in X$ proizvoljan. Definišimo sada niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 \ \ , \ \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Kako $A : X \to X$, jasno je da za proizvoljan prirodan broj n je $x_n \in X$, tj. $(x_n) \subset X$.
Neka je sada $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Na osnovu kontraktivnosti preslikavanja vrijedi

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(Ax_{n-1}, Ax_{n-2}) \leq qd(x_{n-1}, x_{n-2}) \ .$$

Ponavljajući gornji postupak, zaključujemo da vrijedi

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq q^{n-1} d(x_1, x_0) \ . \tag{1.12}$$

Neka je sada $m > n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Koristeći nejednakost trougla i (1.12) imamo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \left(q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &= q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1-q} d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \ . \end{aligned}$$

Na osnovu gornjeg očigledno vrijedi

$$d(x_n, x_m) \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ ,$$

a što u stvari znači da je niz (x_n) Cauchyjev. Kako se on nalazi u kompletnom metričkom prostoru, on je onda i konvergentan, pa stavimo da je $x_n \to \overline{x} \in X$ ($n \to \infty$). Sada imamo

$$0 \leq d(\overline{x}, A\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, A\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} d(Ax_n, A\overline{x}) \ .$$

Zbog kontraktivnosti preslikavanja i konvergencije niza dalje je

$$0 \leq d(\overline{x}, A\overline{x}) \leq q \lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{x}) = 0 \ .$$

Dakle, mora biti $d(\overline{x}, A\overline{x}) = 0$, a što zbog osobine metrike znači da je $A\overline{x} = \overline{x}$, tj. $\overline{x}$ je fiksna tačka preslikavanja.

Neka je i $\overline{\overline{x}} \in X$ neka druga fiksna tačka preslikavanja A. Tada bi bilo

$$d(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = d(A\overline{x}, A\overline{\overline{x}}) \leq q d(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) \ ,$$

a ovo je zbog $q \in [0,1)$ moguće samo ako je $d(\overline{x}, \overline{\overline{x}}) = 0$, tj. ako je $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$. Time smo pokazali i jedinstvenost fiksne tačke posmatranog preslikavanja. ♣

Važnost Banachovog teorema o fiksnoj tački je velika. Medjutim, treba istaći i vrijednost samog dokaza ovog teorema jer nam on daje princip raznih iterativnih metoda. Primjetimo da ako u nejednakosti

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$$

pustimo da $m \to \infty$, dobijamo

$$d(x_n, \overline{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1) \ ,$$

što u stvari predstavlja procjenu greške koja se pravi ako se umjesto tačnog rješenja $\overline{x}$, jednačine $Ax = x$, uzme "n-to približno rješenje" x_n te jednačine.

Kao direktnu posljedicu Banachovog teorema o fiksnoj tački navedimo

Posljedica 1.4.2. *Neka je F zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora X. Ako je $A : F \to F$ kontraktivno preslikavanje, onda preslikavanje A ima tačno jednu fiksnu tačku koja pripada F.*

Kao što ćemo vidjeti, nemora samo preslikavanje biti kontraktivno da bi se obezbijedila egzistencija i jedinstvenost fiksne tačke.

Teorem 1.4.3. *Neka je X kompletan metrički prostor i neka $A : X \to X$. Ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je A^n kontraktivno preslikavanje, tada preslikavanje A ima tačno jednu fiksnu tačku.*

Dokaz : Kako je A^n (za neko $n \in \mathbb{N}$) kontraktivno preslikavanje kompletnog prostora u samog sebe, postoji jedinstvena fiksna tačka tog preslikavanja, tj.

$$(\exists_1 \overline{x} \in X) \ A^n \overline{x} = \overline{x} \ .$$

Ali tada imamo

$$A(A^n \overline{x}) = A^{n+1} \overline{x} = A^n (A\overline{x}) = A\overline{x} \ ,$$

što u stvari znači da je i $A\overline{x}$ fiksna tačka preslikavanja A^n. Zbog jedinstvenosti, zaključujemo da mora važiti

$$A\overline{x} = \overline{x} \ ,$$

odnosno, $\overline{x}$ je fiksna tačka preslikavanja A.

Ako bi postojala još neka fiksna tačka preslikavanja A, npr. $\overline{\overline{x}}$, tada bi imali

$$A^n\overline{\overline{x}} = A^{n-1}(A\overline{\overline{x}}) = A^{n-1}\overline{\overline{x}} = A^{n-2}(A\overline{\overline{x}}) = A^{n-2}\overline{\overline{x}} = \cdots = A\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{x}} \ .$$

Dakle, $\overline{\overline{x}}$ bi bila fiksna tačka i preslikavanja A^n, a to bi značilo da mora biti $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$. ♣

Pokažimo sada neke primjene Banachovog teorema o fiksnoj tački.

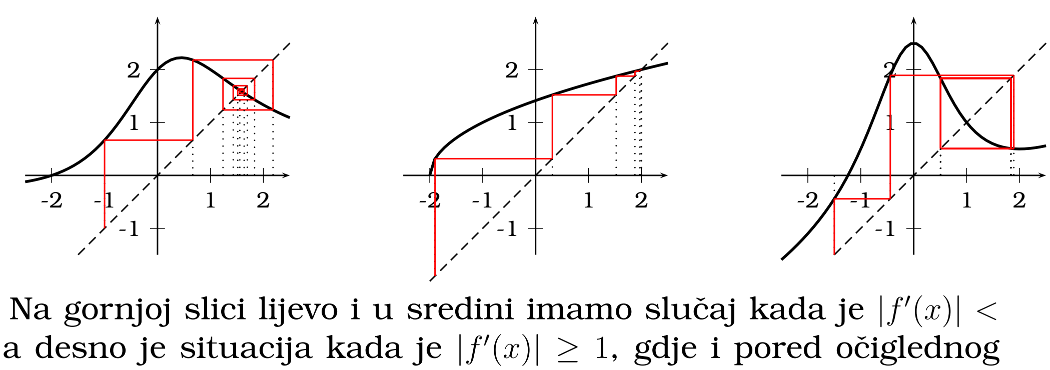
1. Neka je $y = f(x)$ funkcija definisana na segementu $[a,b]$. Pitanje, da li postoji $x_0 \in [a,b]$ takav da je $f(x_0) = x_0$ je očigledno pitanje egzistencije fiksne tačke ovog preslikavanja. Da bi zadovoljili prvi uslov teoreme (preciznije, posljedice) zahtijevamo da $f : [a,b] \to [a,b]$. Uslov kontraktivnosti možemo dobiti na nekoliko načina. Jedan je, zahtjev da je funkcija f Lipschizova na $[a,b]$, tj. da vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad , \quad x, y \in [a,b] \ ,$$

i naravno pri tome zahtijevamo da je $L < 1$. Sada imamo ispunjene sve uslove teoreme o fiksnoj tački, pa postoji jedinstveno $x_0 \in [a,b]$, takav da je $f(x_0) = x_0$.

Uslov kontraktivnosti imamo i ako je ispunjeno $|f'(x)| \leq K < 1$ jer na osnovu Lagrangeove teoreme je

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \ , \ \xi \in [x,y] \ .$$



Na gornjoj slici lijevo i u sredini imamo slučaj kada je $|f'(x)| < 1$, a desno je situacija kada je $|f'(x)| \geq 1$, gdje i pored očiglednog postojanja fiksne tačke, itereativni metod ne konvergira.

2. Koristeći gornji primjer, lahko sada možemo pronaći uslove za postojanje rješenja jednačine $F(x) = 0$, na nekom segmentu $[a, b]$, pri čemu je $F(a) < 0$ i $F(b) > 0$. Pretpostavimo da vrijedi $0 < k \leq F'(x) \leq K$, za proizvoljno $x \in [a, b]$. Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = x - \lambda F(x) \ .$$

Očigledno da je postojanje fiksne tačke funkcije f, ekvivalentno postojanju rješenja polazne jednačine. Kako je sada $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, to onda vrijedi

$$1 - \lambda K \leq f'(x) \leq 1 - \lambda k \ ,$$

pri čemu nam parametar λ očigledno može poslužiti da pomoću njega namjestimo kontraktivnost preslikavanja f.

3. Posmatrajmo konačan linearan sistem algebarskih jednačina

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \ . \tag{1.13}$$

Postavlja se pitanje, pod kojim uslovima će dati sistem imati tačno jedno rješenje?
Jednostavnom transformacijom sistem (1.13) transformišemo u ekvivalentan sistem

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} (1 - a_{ij}) x_j + b_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \ .$$

Definišimo sada preslikavanje $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, zadato gornjim sistemom, na sljedeći način

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ Ax = y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

gdje koordinate tačke y dobijamo iz

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j + b_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

gdje je $a'_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$ ($i, j = 1, 2, ..., n$), a δ_{ij} je Cronecerova delta. Očigledno je da tražiti rješenje sistema (1.13) znači isto što i zahtijevati da definisano preslikavanje ima fiksnu tačku, tj. svodi se na nalaženje $x \in \mathbb{R}^n$, takvog da je $Ax = x$. Kako A slika kompletan prostor u samog sebe, za primjenu Banachovog stava potrebno nam je da je to preslikavanje kontrakcija.

Neka je na $\mathbb{R}^n$ definisana metrika

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|\ ,\ x,y\in\mathbb{R}^n\ .$$

Sada za proizvoljne x', $x''\in\mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} d(Ax',Ax'') &= \max_{1\le i\le n}|y'_i-y''_i| \\ &= \max_{1\le i\le n}|\sum_{j=1}^n a'_{ij}(x'_j-x''_j)| \\ &\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a'_{ij}||x'_j-x''_j| \\ &\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\max_{1\le j\le n}|x'_j-x''_j| \\ &\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a'_{ij}|d(x',x'') \end{aligned}$$

Jasno je sada da uslov

$$\sum_{j=1}^n |a'_{ij}|\le k<1\ ,\ i=1,2,...,n\ , \tag{1.14}$$

predstavlja uslov kontraktivnosti preslikavanja A.

Neka je na $\mathbb{R}^n$ zadata metrika

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|\ ,\ x,y\in\mathbb{R}^n\ .$$

Sada za proizvoljne $x',x''\in\mathbb{R}^n$ imamo

$$\begin{aligned} d(Ax',Ax'') &= \sum_{i=1}^n|y'_i-y''_i| \\ &= \sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a'_{ij}(x'_j-x''_j)\right| \\ &\le \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a'_{ij}||x'_j-x''_j| \\ &\le \sum_{i=1}^n|a'_{ij}|d(x',x'')\ . \end{aligned}$$

Uslov kontraktivnosti je sada

$$\sum_{i=1}^{n} |a'_{ij}| \leq k < 1 \ , \ j = 1, 2, ..., n \ . \tag{1.15}$$

Posmatrajmo sada novu metriku na $\mathbb{R}^n$,

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Za $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ je

$$\begin{aligned} d(Ax', Ax'') &= \left(\sum_{i=1}^{n} |y'_i - y''_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(x'_j - x''_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a'^2_{ij} d(x', x'') \ . \end{aligned}$$

Sada je uslov kontraktivnosti zadat sa

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a'^2_{ij} \leq k < 1 \ . \tag{1.16}$$

Svaki od uslova (1.14), (1.15) i (1.16) je dakle uslov kontraktivnosti preslikavanja A te na osnovu teorema o fiksnoj tački, postoji jedinstveno rješenje jednačine $Ax = x$, a to je kako smo vidjeli, rješenje i sistema (1.13).

Sada iterativnim postupkom

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j^{(k)} + b_i \ , \ i = 1, 2, ..., n \ ,$$

krećući od proizvoljne tačke $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, dobijamo niz tačaka $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ koji će konvergirati ka rješenju sitema (1.13).

Napomenimo ovdje da je svaki od uslova (1.14), (1.15) i (1.16), ekvivalentan uslovu

$$\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - 1 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ .$$

4. Neka je $f(x,y)$ neprekidna funkcija u xy-ravni. Pod kojim uslovima će diferencijalna jednačina prvog reda

$$y' = f(x,y)\ ,\ \text{sa uslovom } y(x_0) = y_0\ , \tag{1.17}$$

imati tačno jedno neprekidno rješenje? Kako se želimo poslužiti Banachovim teoremom o fiksnoj tački, ideja je definisati neko preslikavanje kojeg će fiksna tačka biti rješenje postavljenog problema. U tom cilju posmatrajmo integralnu jednačinu

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0\ . \tag{1.18}$$

Jasno je da svako rješenje integralne jednačine (1.18) predstavlja i rješenje jednačine (1.17) i obratno. Zato posmatrajmo preslikavanje definisano sa

$$A\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0\ .$$

Očigledno je za neprekidnu funkciju ϕ i $A\phi$ neprekidna funkcija, pa za neko $\delta > 0$ (čiji izbor najvjerovatnije nije proizvoljan) imamo $A : C[x_0, x_0+\delta] \to C[x_0, x_0+\delta]$. Kako je svaki prostor $C[a,b]$ kompletan, sa standardnom metrikom definisanom sa

$$\phi, \psi \in C[a,b]\quad ,\quad d(\phi,\psi) = \max_{a\le t\le b} |\phi(t) - \psi(t)|\ ,$$

to A dakle, preslikava kompletan prostor u samog sebe.

Ostaje nam naći uslove pod kojim je definisano preslikavanje kontraktivno. U tom cilju, za proizvoljne ϕ, $\psi \in C[x_0, x_0+\delta]$, posmatrajmo

$$\begin{aligned}
d(A\phi, A\psi) &= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} |A\phi(x) - A\psi(x)| \\
&= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \left| \int_{x_0}^{x} f(t,\phi(t))dt + y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt - y_0 \right| \\
&= \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t)))dt \right| \\
&\le \max_{x_0\le x\le x_0+\delta} \int_{x_0}^{x} |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|dt\ .
\end{aligned}$$

Da bi došli do uslova kontraktivnosti, sada se logično nameće problem nekakvog uslova na funkciju f. Ako je, npr. funkcija f Lipschitzova po drugoj varijabli u oblasti u kojoj je posmatramo, tj. ako je zadovoljen uslov

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \le L|y' - y''| \ ,$$

tada iz gornjeg imamo

$$d(A\phi, A\psi) \le \max_{x_0 \le x \le x_0 + \delta} \int_{x_0}^{x} L|\phi(t)) - \psi(t)|dt \ ,$$

pa uzimajući maksimum od $|\phi(t) - \psi(t)|$ za $x_0 \le t \le x_0 + \delta$, imamo

$$d(A\phi, A\psi) \le Ld(\phi, \psi) \max_{x_0 \le x \le x_0 + \delta} \int_{x_0}^{x} dt \ ,$$

odnosno,

$$d(A\phi, A\psi) \le L\delta d(\phi, \psi) \ .$$

Kao što smo spomenuli na početku, δ sada možemo izabrati tako da je $L\delta < 1$, a sa tim uslovom naše preslikavanje A će biti kontrakcija, pa na osnovu svega rečenog, postojat će jedinstvena fiksna tačka tog preslikavanja. Dakle, postoji jedinstvena funkcija $y_\delta \in C[x_0, x_0 + \delta]$, koja je rješenje problema (1.17) na segmentu $[x_0, x_0 + \delta]$.

Sada sličnim rezonovanjem možemo pokazati da će i na segmentu $[x_0 + \delta, x_0 + 2\delta]$ postojati jedinstveno rješenje problema $y' = f(x, y)$ sa uslovom $y(x_0 + \delta) = y_\delta(x_0 + \delta)$. Naravno da ovo razmišljanje možemo primjenjivati, produžavajući interval i na jednu i na drugu stranu od x_0, pa zaključujemo da će postojati jedinstveno neprekidno rješenje problema (1.17) na čitavoj realnoj pravoj.

1.5 Separabilnost metričkih prostora

Definicija 1.5.1. *Za metrički prostor kažemo da je separabilan ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup.*

Primjer 1.21. Realna prava sa uobičajenom metrikom je primjer separabilnog prostora, jer je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ je prebrojiv skup.

$\mathbb{R}^n$ je takodje separabilan za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$. Zaista, neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljna. Kako je $\mathbb{Q}$ svuda gust u $\mathbb{R}$, to za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i za svako $i = 1, 2, ..., n$, postoji $q_i \in \mathbb{Q}$, tako da važi

$$|x_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \ .$$

Posmatrajmo sada ovako konstruisanu tačku $q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in \mathbb{Q}^n$. Vrijedi,

$$d(x,q) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - q_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon \ .$$

Dakle, $\mathbb{Q}^n$ je svuda gust skup u $\mathbb{R}^n$, a kako je on i prebrojiv skup, to je $\mathbb{R}^n$ separabilan. $\diamondsuit$

Primjer 1.22. Separabilni su i prostori l_p $(1 \leq p < \infty)$, c, c_0 ali prostor l_∞ nije separabilan.

Da pokažemo neseparabilnost prostora l_∞, posmatrajmo skup svih nizova čije su koordinate zapisane samo sa 0 i 1,

$$A = \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} |\ \xi_n \in \{0,1\}, \forall n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Ovakvih nizova ima kontinum mnogo (interpretiramo ih kao binarne zapise realnih brojeva iz $[0, 1]$) i pri tome je očigledno $A \subset l_\infty$. Za proizvoljne $x, y \in A$, vrijedi

$$d(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 1 \ . \tag{1.19}$$

Pretpostavimo sada da u l_∞ postoji svuda gust skup. To bi značilo da u proizvoljnoj okolini proizvoljne tačke iz l_∞, mora postojati bar jedna tačka iz tog svuda gustog skupa. Ali to bi onda moralo vrijediti i za tačke skupa A. Medjutim, zbog (1.19), u kugli $B(x, r)$, gdje je $x \in A$ i $r < 1$, osim tačke x nema drugih tačaka iz A. Dakle da bi svaku tačku "dobro aproksimirali", u svakoj ovakvoj kugli bi morala biti bar jedna tačka iz svuda gustog skupa. To bi opet značilo da tačaka u svuda gustom skupu mora biti bar onoliko koliko ima ovakvih kugli, a ovih opet ima koliko ima tačaka u A, tj. kontinum mnogo. Dakle, ako bi i postojao svuda gust skup u l_∞ on ne bi mogao biti najviše prebrojiv, pa l_∞ nije separabilan prostor. $\diamondsuit$

Primjer 1.23. Prostor $C[a,b]$ je separabilan, a tu tvrdnju imamo iz poznatog Weierstrassovog teorema:
Za svaku neprekidnu funkciju f definisanu na segmentu $[a,b]$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji polinom p_ε, takav da vrijedi

$$|x(t) - p_\varepsilon(t)| < \varepsilon \ , \ a \leq t \leq b \ .$$

$\diamondsuit$

Definicija 1.5.2. *Za familiju $(B_i)_{i\in I}$ otvorenih skupova u metričkom prostoru X kažemo da je baza, ako se svaki otvoren skup u X može prikazati kao unija nekih elemenata date familije.*

Jasno je da u svakom metričkom prostoru gornju osobinu ima familija svih otvorenih kugli $(B(x,r))_{x\in X,\ r>0}$. Medjutim, takva baza je "ogromna" po broju elemenata, a nama bi bilo u interesu da je ona što manja po broju svojih elemenata.

Definicija 1.5.3. *Za metrički prostor kažemo da zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti ako u njemu postoji baza sa najviše prebrojivo mnogo elemenata.*

Teorem 1.5.1. *Metrički prostor je separabilan ako i samo ako zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.*

Dokaz : Neka je X separabilan metrički prostor i neka je $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ najviše prebrojiv svuda gust skup tačaka u X. Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, posmatrajmo sve moguće kugle oblika $B(x_n, \frac{1}{m})$. Neka je sada G proizvoljan otvoren skup u X i neka je $x \in G$ takodje proizvoljan. Zbog otvorenosti skupa G, postoji $m = m(x) \in \mathbb{N}$, takav da je $B(x, \frac{1}{m}) \subseteq G$. Kako je A svuda gust u X, postoji $x_{n(x)} \in A$, takav da je $d(x_{n(x)}, x) < \frac{1}{3m}$. Posmatrajmo sada kuglu $B(x_{n(x)}, \frac{1}{2m})$. Jasno je da vrijedi $x \in B(x_{n(x)}, \frac{1}{2m}) \subseteq G$, pa nije teško zaključiti da vrijedi i

$$G = \bigcup_{x\in G} B\left(x_{n(x)}, \frac{1}{2m(x)}\right) \ ,$$

a ovo znači da je familija $(B(x_n, \frac{1}{m}))_{n,m\in\mathbb{N}}$ baza u X i to najviše prebrojiva, pa X zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti.

Neka je sada $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ najviše prebrojiva baza u X. Ako iz svakog B_i izaberemo po jednu tačku x_i ($i \in \mathbb{N}$) i od tih tačaka formiramo skup A, jasno je da je A najviše prebrojiv skup. Po pretpostavci, svaki se otvoren skup može prikazati kao unija elemenata baze, tako da se u proizvoljnom otvorenom skupu nalazi bar jedna tačka skupa A, a to ne znači ništa drugo nego da je A svuda gust u X, pa je X separabilan metrički prostor. ♣

Definicija 1.5.4. *Za familiju $(G_i)_{i\in I}$ kažemo da je pokrivač skupa M ako vrijedi*

$$(\forall x \in M)(\exists i \in I) x \in G_i \ .$$

Ukoliko je svaki G_i ($i \in I$) otvoren skup govorimo o otvorenom pokrivaču, a ako je I najviše prebrojiv skup govorimo o najviše prebrojivom pokrivanju.

Teorem 1.5.2. ***(teorem Lindelöfa)***
Ako je X separabilan metrički prostor, onda se iz svakog otvorenog pokrivača za X može izdvojiti najviše prebrojiv potpokrivač.

Dokaz : Neka je X separabilan metrički prostor, tada postoji najviše prebrojiva baza $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ u X. Neka je $(G_i)_{i\in I}$ otvoreni pokrivač od X, tj.

$$(\forall x \in X)(\exists i = i(x) \in I) \ x \in G_{i(x)} \ .$$

Kako je svaki $G_{i(x)}$ otvoren skup, to postoji element baze $B_{n(x)}$, takav da je

$$x \in B_{n(x)} \subseteq G_{i(x)} \ . \tag{1.20}$$

Jasno je sada da različitim skupovima $B_{n(x)}$ možemo pridružiti različite odgovarajuće $G_{n(x)}$ koji zadovoljavaju (1.20). Pri tome očigledno vrijedi

$$X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_{n(x)} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{n(x)} \ .$$

Dakle $(G_{n(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ je najviše prebrojiv pokrivač od X. ♣

1.6 Kompaktnost metričkih prostora

Definicija 1.6.1. *Za metrički prostor kažemo da je kompaktan ako se iz svakog njegovog niza može izdvojiti konvergentan podniz.*

Definicija 1.6.2. *Neka je M podskup metričkog prostora X. Za skup M kažemo da je relativno kompaktan ako se iz svakog niza u M može izdvojiti konvergentan podniz, tj.*

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}})\ x_{n_k} \to x_0\ ,\ (k \to \infty)\ ,\ x_0 \in X\ .$$

Ako je $x_0 \in M$, kažemo da je M kompaktan skup.

Jasna je razlika izmedju kompaktnosti i relativne kompaktnosti, tj. relativna kompaktnost i zatvorenost skupa ekvivalentne su kompaktnosti skupa.

Teorem 1.6.1. *Svaki kompaktan metrički prostor je i kompletan.*

Dokaz : Neka je X kompaktan metrički prostor i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan Cauchyjev niz u X. Zbog kompaktnosti, postoji podniz (x_{n_k}) našeg niza koji je konvergentan, $x_{n_k} \to x_0 \in X$ ($k \to \infty$). Sada imamo

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0)\ .$$

Prvi sabirak na desnoj strani možemo učiniti proizvoljno malim jer je niz Caucyjev, a drugi takodje, zbog konvergencije podniza. Dakle,

$$d(x_n, x_0) \to 0\ ,\ (n \to \infty)\ ,$$

tj. niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentan, pa zbog proizvoljnosti niza, prostor X je kompletan. ♣

Teorem 1.6.2. *Svaki kompaktan skup je zatvoren.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je $(x_n) \subset M$, takav da $x_n \to x_0$ kada $n \to \infty$. Zbog kompaktnosti skupa, postoji $(x_{n_k}) \subset (x_n)$, takav da $x_{n_k} \to x'$ ($k \to \infty$) i pri tome je $x' \in M$. Zbog jedinstvenosti tačke konvergencije, zaključujemo da je $x_0 = x'$, odnosno $x_0 \in M$, pa dakle M sadrži sve svoje tačke nagomilavanje te je kao takav, zatvoren skup. ♣

Teorem 1.6.3. *Svaki relativno kompaktan skup je ograničen.*

Dokaz : Neka je M relativno kompaktan podskup metričkog prostora X. Pretpostavimo da M nije ograničen. M nije prazan, pa postoji $x_0 \in M$. Kako M nije ograničen, to M nije sadržan u kugli $B(x_0, 1)$, te zaključujemo da postoji $x_1 \in M$, takav da $x_1 \notin B(x_0, 1)$ odnosno, $d(x_0, x_1) \geq 1$.
Označimo sa $r = d(x_0, x_1) + 1$, pa opet zbog neograničenosti rezonujemo da M nije sadržan ni u kugli $B(x_0, r)$, tj. postoji $x_2 \in M$ takav da je $d(x_0, x_2) \geq r \geq 1$. Kako je

$$1 + d(x_0, x_1) = r \leq d(x_0, x_2) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) \ ,$$

zaključujemo da je $d(x_1, x_2) \geq 1$. Jasno je da sada ovaj postupak možemo produžiti i na taj način formirati niz (x_n) sa osobinom da za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi, $d(x_n, x_m) \geq 1$. Ovo znači da se iz datog niza ne može izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, a to se opet kosi sa pretpostavkom o relativnoj kompaktnosti skupa M. Dakle, M mora biti ograničen skup. ♣

Definicija 1.6.3. *Neka su M i N podskupovi metričkog prostora X. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksiran realan broj. Za skup N kažemo da je ε-mreža skupa M ako za svako $x \in M$, postoji $y \in N$, tako da je $d(x, y) < \varepsilon$. Ako je N kompaktan skup, kažemo da je N kompaktna ε-mreža, a ako je konačan skup, kažemo da je konačna ε-mreža.*

Lema 1.6.4. *Skup N je ε-mreža ($\varepsilon > 0$) skupa M ako i samo ako vrijedi*

$$M \subseteq \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon) \ .$$

Teorem 1.6.5. *Potreban uslov za relativnu kompaktnost skupa $M \subseteq X$ jeste da za svako $\varepsilon > 0$, postoji konačna ε-mreža skupa M. Ako je metrički prostor X kompletan, gornji uslov je i dovoljan.*

Dokaz : Neka je M relativno kompaktan skup. Pretpostavimo da za neko $\varepsilon_0 > 0$ ne postoji konačna ε_0-mreža skupa M. Kako M nije prazan, to za proizvoljno $x_0 \in M$ skup $\{x_0\}$ nije ε_0-mreža skupa M, pa postoji $x_1 \in M$, takav da je $d(x_0, x_1) \geq \varepsilon_0$. Medjutim, ni skup $\{x_0, x_1\}$ nije ε_0-mreža za M, pa postoji $x_2 \in M$, takav da je $d(x_0, x_2) \geq \varepsilon_0$ i $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$. Nastavljajući gornje rasudjivanje, dolazimo do niza $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, kod koga za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi, $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$. Ali tada se iz niza (x_n) nemože izdvojiti niti jedan konvergentan podniz, što je suprotno pretpostavci o relativnoj kompaktnosti skupa M. Dakle, za svako $\varepsilon > 0$, skup M ima konačnu ε-mrežu.

Neka je sada X kompletan metrički prostor i neka $M \subseteq X$ ima konačnu ε-mrežu za svako $\varepsilon > 0$. Uzmimo proizvoljan niz $(x_n) \subset M$. Neka je $N_1 = \{y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n_1}\}$ konačna 1-mreža skupa M. Na osnovu Leme 1.6.4 vrijedi

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(y_{1i}, 1) \ .$$

Tim prije je i naš niz sadržan u gornjoj uniji kugli, a zbog konačnog broja tih kugli, postoji medju njima kugla, označimo je sa B_1, koja u sebi sadrži beskonačan podniz (x_{n_k}) niza (x_n).
Neka je sada $N_2 = \{y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n_2}\}$ $\frac{1}{2}$-mreža skupa M. Ali to je onda $\frac{1}{2}$-mreža i za naš podniz $(x_{n_k}) \subset B_1$, te postoji kugla $B_2 = B(y_{2i}, \frac{1}{2})$ ($i \in \{1, 2, ..., n_2\}$), koja u sebi sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_{n_k}).
Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do niza kugli $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa sljedećim osobinama:

- Poluprečnik kugle B_i je $\frac{1}{i}$ ($i \in \mathbb{N}$).
- U svakoj kugli B_i ($i \in \mathbb{N}$) ima beskonačno mnogo članova niza (x_n).
- Članovi niza koji se nalaze u kugli B_i, sadržani su i u svakoj kuglu B_j za $j \leq i$.

Iz svake kugle B_i izaberimo po jedan element našeg niza (x_n) i označimo ga sa z_i ($i \in \mathbb{N}$). Očigledno je niz (z_n) podniz niza (x_n). Osim toga, za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$ (neka je npr. $m \leq n$) imamo da $z_n, z_m \in B_m$, a zbog prve osobine ovih kugli, imamo

$$d(z_n, z_m) < \frac{2}{m} \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ .$$

Dakle, niz (z_n) je Cauchyjev, pa zbog kompletnosti prostora on mora biti i konvergentan.
Iz proizvoljnog niza u M izdvojili smo konvergentan podniz, te je M relativno kompaktan skup. ♣

Sada se lahko dokazuje još jedna karakterizacija relativne kompaktnosti.

Posljedica 1.6.6. *Neka je M podskup kompletnog metričkog prostora X. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji kompaktna ε-mreža skupa M tada je M relativno kompaktan skup.*

Teorem 1.6.7. *Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.*

Dokaz : Zbog kompaktnosti prostora X, za svako $n \in \mathbb{N}$, postoji konačna $\frac{1}{n}$-mreža N_n za X. Posmatrajmo skup

$$N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \ .$$

Kao prvo N je najviše prebrojiv, kao prebrojiva unija konačnih skupova.
Neka je $x \in X$ proizvoljan. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a tada možemo naći element y iz $\frac{1}{n}$-mreže N_n, takav da je $d(x, y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, pa je očigledno N i svuda gust u X, tj. X je separabilan prostor. ♣

1.6.1 Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima

Teorem 1.6.8. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je ograničena i dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je $f \in C(M)$. Ako pretpostavimo da f nije ograničena, to bi značilo da postoji $(x_n) \subset M$, takav da

$$f(x_n) \to +\infty \ , \ (n \to \infty) \tag{1.21}$$

(ili eventualno $f(x_n) \to -\infty$). Kako je M kompaktan, postoji podniz (x_{n_k}) takav da $x_{n_k} \to x_0 \in M$ ($k \to \infty$), a onda zbog neprekidnosti funkcije imamo

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) < +\infty \ , \ (k \to \infty) \ .$$

S druge strane, zbog (1.21) moralo bi biti

$$f(x_{n_k}) \to +\infty \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

a to je očigledna kontradikcija. Dakle, f je ograničena funkcija.
Sada zbog ograničenosti funkcije imamo da je

$$r = \sup_{x\in M} f(x) < +\infty \ .$$

Na osnovu definicije supremuma, postoji niz $(y_n) \subset M$, takav da je

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ f(y_n) > r - \frac{1}{n}\ ,$$

a ovo znači da $f(y_n) \to r$ ($n \to \infty$). Ponovo zbog kompaktnosti skupa M, postoji $(y_{n_k}) \subset (y_n)$, takav da $y_{n_k} \to y_0 \in M$ ($k \to \infty$). Ali tada bi imali

$$f(y_{n_k}) \to f(y_0)\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

odnosno, zaključujemo $f(y_0) = r$. Dakle, funkcija dostiže svoju najveću vrijednost.
Na analogan način se pokazuje da funkcija dostiže i najmanju vrijednost, čime je teorem dokazan. ♣

Teorem 1.6.9. *Neprekidna funkcija na kompaktnom skupu je i uniformno neprekidna.*

Dokaz : Neka je M kompaktan skup i neka je f neprekidna funkcija definisana na M. Pretpostavimo da f nije uniformno neprekidna funkcija. Negacijom definicije uniformne neprekidnosti to bi značilo

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n', x_n'')\left(d(x_n', x_n'') < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0\right)\ . \tag{1.22}$$

Na ovaj način su formirana dva niza (x_n') i (x_n'') u M iz kojih zbog kompaktnosti možemo izdvojiti konvergentne podnozove, tj. postoji $(x_{n_k}') \subset (x_n')$, takav da $x_{n_k} \to x_0'$ ($k \to \infty$). Kako je

$$d(x_{n_k}', x_{n_k}'') < \frac{1}{n_k} \to 0\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

zaključujemo da tada mora vrijediti i $x_{n_k}'' \to x_0'$ ($k \to \infty$). Medjutim, to bi zbog neprekidnosti funkcije f značilo

$$|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \to 0\ ,\ (k \to \infty)\ ,$$

što je suprotno pretpostavci (1.22). ♣

Iako smo dali nekoliko karakterizacija kompaktnosti na proizvoljnim metričkim prostorima, od velikog su interesa što bolje karakterizacije, a njih možemo dati na konkretnim metričkim prostorima. Ovdje ćemo dati jednu važnu karakterizaciju relativne kompaktnosti na prostoru neprekidnih funkcija, poznati Arzela-Ascollijev stav, koja je odigrala veliku ulogu u razvoju topologije i funkcionalne analize. Kao prvo definišimo sljedeće pojmove.

Definicija 1.6.4. *Neka je $E \subset C(X)$. Za E kažemo da je skup podjednako ograničenih funkcija ako postoji konstanta $M > 0$, takva da za proizvoljno $x \in X$ i za proizvoljnu funkciju $f \in E$ vrijedi*

$$|f(x)| \leq M \ .$$

Definicija 1.6.5. *Za Skup $E \subset C(X)$ kažemo da je skup podjednako neprekidnih funkcija ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall f \in E)(\forall x', x'' \in X)(d(x', x'') < \delta \Rightarrow d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon) \ .$$

Teorem 1.6.10. ***(Arzela-Ascolli)***
Neka je X kompaktan skup i $C(X)$ prostor neprekidnih funkcija na X, sa standardnom metrikom. Skup $E \subset C(X)$ je relativno kompaktan ako i samo ako je on skup podjednako ograničenih i podjednako neprekidnih funkcija.

Dokaz : Neka je E relativno kompaktan podskup metričkog prostora $C(X)$. Kao takav, on je i ograničen, pa postoje $f_0 \in C(X)$ i $r > 0$, takvi da je $E \subseteq B(f_0, r)$. Ovo znači da za proizvoljno $f \in E$ vrijedi

$$d(f, f_0) = \max_{x \in X} |f(x) - f_0(x)| < r \ . \tag{1.23}$$

Neka je sada $f \in E$ proizvoljna i neka je $x \in X$ takodje proizvoljno.

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)| \\ &\leq d(f, f_0) + \max_{x \in X} |f_0(x)| \\ &\leq r + \max_{x \in X} |f_0(x)| \ . \end{aligned}$$

Kako je f_0 neprekidna funkcija, ona dostiže svoju maksimalnu vrijednost, te stavljajući da je $M = r + \max_{x \in X} |f_0(x)|$ imamo,

$$|f(x)| \leq M \ ,$$

za svaku funkciju $f \in E$ i za svako $x \in X$, a to znači da je E skup podjednako ograničenih funkcija.

Skup E je relativno kompaktan skup pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji konačna $\frac{\varepsilon}{3}$-mreža za E i neke je čine funkcije $f_1, f_2, ..., f_n$ ($f_i \in C(X)$, $i = 1, 2, ..., n$). Kako je svaka od funkcija f_i ($i = 1, 2, ..., n$) neprekidna na X, a time i uniformno neprekidna (na kompaktnom skupu), to za proizvoljan $\varepsilon > 0$, postoji $\overline{\delta} = \delta(\varepsilon) > 0$, tako da za proizvoljne $x', x'' \in X$, čim je $d(x', x'') < \overline{\delta}$, onda je

$$|f_i(x') - f_i(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} \ , \ i = 1, 2, ..., n \ .$$

Gornja činjenica vrijedi za sve funkcije f_i ($i = 1, 2, .., n$), tj. postojeći $\overline{\delta}$ je važeći za sve funkcije, a to je opravdano činjenicom da ovih funkcija ima konačno mnogo.
Neka je sada $f \in E$ proizvoljna i izaberimo iz $\frac{\varepsilon}{3}$-mreže njoj odgovarajuću funkciju f_{i_0} za koju vrijedi $d(f, f_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Neka su sada $x', x'' \in X$, takve da je $d(x', x'') < \overline{\delta}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
|f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - f_{i_0}(x')| + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x'')| + |f_{i_0}(x'') - f(x'')| \\
&\leq d(f, f_{i_0}) + |f_{i_0}(x') - f_{i_0}(x'')| + d(f, f_{i_0}) \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Dakle, skup E je skup podjednako neprekidnih funkcija, a time smo pokazali neophodnost uslova.

Dokažimo sada i dovoljnost uslova, tj. neka je E skup podjednako ograničenih i podjednako neprekidnih funkcija i dokažimo njegovu relativnu kompaktnost. Ako je skup E konačan, tvrdnja trivijalno vrijedi. Pretpostavimo zato da je E beskonačan skup. Neka je $(f_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz u E.
Zbog kompaktnosti skupa X imamo njegovu separabilnost i neka je $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ prebrojiv svuda gust skup u X. Kako je E skup podjednako ograničenih funkcija, to je niz $(f_i(x_1))_{i\in\mathbb{N}}$ ograničen skup, a kao takav on sadrži konvergentan podniz $(f_{i_k}(x_1))_{k\in\mathbb{N}}$. Označimo ga jednostavnosti radi sa $(f_i^{(1)}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ i taj niz je konvergentan u tački $x = x_1$. Ako sada posmatramo niz $(f_i^{(1)}(x_2))_{i\in\mathbb{N}}$, on je opet ograničen, pa i iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz $(f_i^{(2)}(x))$ koji je konvergentan u tački $x = x_2$, a kako je on podniz niza $(f_i^{(1)}(x))$, on je konvergentan i u tački $x = x_1$. Ako nastavimo ovaj postupak, dobit ćemo niz nizova

$$(f_i^{(1)}(x)), (f_i^{(2)}(x)), (f_i^{(3)}(x)), ..., (f_i^{(m)}(x)), ...$$

koji imaju sljedeće osobine:

- Svaki od njih je podniz polaznog niza $(f_i(x))$.
- Počev od drugog, svaki od njih je podniz niza koji je prije njega.
- m-ti niz je konvergentan u tačkama $x = x_1, x_2, ..., x_m$.

Dijagonalnim postupkom formirajmo sada niz $(\phi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$, tj.

$$\phi_i(x) = f_i^{(i)}(x)\ ,\ i = 1, 2, ...$$

Jasno je da je novoformirani niz, podniz našeg polaznog niza. Osim toga, kako je on, posmatrajući ga od m-tog člana ($m \in \mathbb{N}$), podniz m-tog niza ($(f_i^{(m)}(x))$), on je konvergentan u svim tačkama svuda gustog skupa $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.
Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. E je skup podjednako neprekidnih funkcija, onda postoji $\delta(\varepsilon) > 0$, takav da za sve $x', x'' \in X$ i za svaku funkciju $f \in E$ vrijedi

$$d(x', x'') < \delta \ \Rightarrow \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \ . \tag{1.24}$$

Za ovakav δ, formirajmo konačnu δ-mrežu skupa X (X je kompaktan). Neka je čine elementi $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$. Ne gubeći na opštosti možemo smatrati da su tačke naše δ-mreže neke od tačaka svuda gustog skupa $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Dakle, niz $(\phi_i(x))$ je konvergentan u svakoj od tačaka $y_1, y_2, ..., y_k$, a time je i Cauchyjev, tj. postoji $\overline{n} = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takav da za proizvoljne $i, j \geq \overline{n}$ vrijedi

$$|\phi_i(y_s) - \phi_j(y_s)| < \frac{\varepsilon}{3} \ , \ s = 1, 2, ..., k \ . \tag{1.25}$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Iz δ-mreže izaberimo y_{i_0} takav da je $d(x, y_{i_0}) < \delta$. Sada za $i, j \geq \overline{n}$ imamo

$$|\phi_i(x) - \phi_j(x)| \leq |\phi_i(x) - \phi_i(y_{i_0})| + |\phi_i(y_{i_0}) - \phi_j(y_{i_0})| + |\phi_j(y_{i_0}) - \phi_j(x)| \ .$$

Zbog (1.24) i (1.25) imamo

$$|\phi_i(x) - \phi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \ .$$

Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $\overline{n} \in \mathbb{N}$, tako da za sve $i, j \in \mathbb{N}$, $i, j \geq \overline{n}$, vrijedi

$$|\phi_i(x) - \phi_j(x)| < \varepsilon \ .$$

Ovo znači da je niz $(\phi_i(x))$ Cauchyjev, a time i konvergentan u svim tačkama $x \in X$, tj. on je uniformno konvergentan. Kako su pri tome sve funkcije ϕ_i ($i \in \mathbb{N}$) neprekidne, zaključujemo da niz (ϕ_i) konvergira ka neprekidnoj funkciji ϕ_0 i to u smislu metrike u $C(X)$.

Iz proizvoljnog niza $(f_i(x)) \subset E$, izdvojili smo konvergentan podniz $(\phi_i(x))$, što znači da je skup E relativno kompaktan skup, time je dokaz teoreme završen. ♣

Glava 2

Banachovi prostori

2.1 Linearni vektorski prostori

Definicija 2.1.1. *Neka je Φ ili skup realnih ($\mathbb{R}$) ili skup kompleksnih ($\mathbb{C}$) brojeva. Neprazan apstraktan skup V, snabdjeven sa dvije binarne operacije "$+$" $: V \times V \to V$ (sabiranje) i "$\cdot$" $: \Phi \times V \to V$ (množenje skalarom) je (realan ili kompleksan) linearan vektorski prostor ako i samo ako su za sve $a, b \in \Phi$ i sve $u, v, w \in V$ zadovoljeni sljedeći uslovi:*

1. $u + v \in V$ *(zatvorenost operacije sabiranja)*

2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(asocijativnost sabiranja)*

3. $(\exists 0 \in V)(\forall u \in V)\ 0 + u = u$ *(egzistencija neutralnog elementa za sabiranje)*

4. $(\forall u \in V)(\exists v \in V)\ u + v = 0$ *(egzistencija inverznog elementa za sabiranje)*

5. $u + v = v + u$ *(komutativnost sabiranja)*

6. $a \cdot u \in V$ *(zatvorenost operacije množenja sa skalarom)*

7. $a(bu) = (ab)u$ *(asocijativnost množenja sa skalarom)*

8. $(\exists 1 \in \Phi)(\forall u \in V)\ 1 \cdot u = u$ *(egzistencija neutralnog elementa za množenje skalarom)*

9. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$ *(distributivnost množenja skalarom u odnosu na sabiranje)*

10. $(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u$ *(distributivnost u odnosu na sabiranje skalara)*

Elemente skupa Φ nazivamo skalarima, a elemente skupa V nazivamo vektorima. Množenje skalarom, $a\cdot u$, uobičajeno zapisujemo sa au, a za izraz $u+(-v)$ koristimo kraći zapis sa $u-v$. Gornja definicija radi sa proizvoljnim apstraktnim skupom V, ne uzimajući u obzir o kakvoj vrsti elemenata je riječ. Tako skup V može biti skup realnih brojeva, ali takodje može biti skup beskonačnih nizova, skup integrabilnih funkcija, skup matrica i sl. Iz konteksta će uvijek biti jasno sa kakvim objektima radimo i u daljem, kad god kažemo "prostor", podrazumijevamo linearan vektorski prostor.

U ispitivanju da li je V linearan vektorski prostor, prije ispitivanja svih gornjih deset osobina, uobičajeno je prvo ispitati

- Da li V sadrži nula element?
- Da li je V zatvoren u odnosu na operacije sabiranja i množenja skalarom?

Ukoliko je odgovor negativan na jedno od ovih pitanja, V nije linearan vektorski prostor. Provjeriti da li su sljedeći skupovi sa uobičajenim operacijama "+" i "$\cdot$" linearni vektorski prostori:

Primjer 2.1. 1. Skup $\mathbb{R}$.

2. Skup $\mathbb{R}^+$.

$\diamondsuit$

Primjer 2.2. 1. Neka su $m,n\in\mathbb{N}$. Skup $M_{n\times m}$, svih matrica formata $n\times m$.

2. Skup $M^0_{n\times n}$, svih kvadratnih matrica na čijoj se dijagonali nalaze samo nule.

3. Skup $M^2_{n\times n}$, svih kvadratnih matrica na čijoj se dijagonali nalaze samo 2.

$\diamondsuit$

Primjer 2.3. 1. Skup $B[a,b]$, svih ograničenih funkcija na segmentu $[a,b]$.

2. Skup $A=\{f\in C[a,b]|\ f(a)=0\}$.

$\diamondsuit$

Definicija 2.1.2. *Neka je V lienearan vektorski prostor. Za skup $W \subseteq V$ kažemo da je potprostor prostora V ako vrijedi*

1. $(\forall u, v \in W)\ u + v \in W$.
2. $(\forall a \in \Phi)(\forall u \in W)\ au \in W$.

Drugačije rečeno $W \subseteq V$ je potprostor ako je on sam za sebe linearana vektorski prostor. Za skup W u tom slučaju kažemo da je i lineal ili linearna mnogostrukost u V.

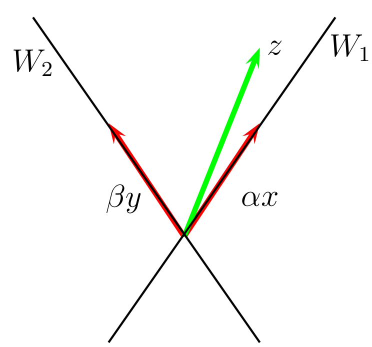
Lema 2.1.1. *Ako su $W_1, W_2, ..., W_n$ potprostori vektorskog prostora V, tada je i $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_n$ vektorski potprostor od V.*

Sa unijom potprostora stvari su malo drugačije. Naime, ako su W_1 i W_2 potprostori prostora V, njihova unija nemora biti potprostor.

Primjer 2.4. U prostoru $\mathbb{R}^2$ posmatrajmo vektore $x = (1, 1)$ i $y = (-1, 1)$. Skupovi

$$W_1 = \{\alpha x |\ \alpha \in \mathbb{R}\}\ ,\ W_2 = \{\beta y |\ \beta \in \mathbb{R}\}\ ,$$

očigledno su potprostori od $\mathbb{R}^2$. Medjutim, za $\alpha \neq 0, \beta \neq 0 \in \mathbb{R}$, vektor $z = \alpha x + \beta y \notin W_1 \cup W_2$.



♢

Definicija 2.1.3. *Neka je V linearan prostor, $v_1, v_2, ..., v_n$ vektori iz V i $a_1, a_2, ..., a_n$ skalari iz Φ. Vektor*

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i\ ,$$

nazivamo linearnom kombinacijom vektora $v_1, v_2, ..., v_n$ sa koeficijentima $a_1, a_2, ..., a_n$.

Ako je $S \subseteq V$, V linearan prostor, skup

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i | \ \lambda \in \Phi, \ x_i \in S, \ i = 1, 2, ..., n \right\} ,$$

nazivamo lienealom nad S ili linealom generisanim skupom S.

Lema 2.1.2. *Neka je S podskup linearnog prostora V. Skup $L(S)$ je najmanji lineal u V koji sadrži skup S.*

Dokaz : Kako je $L(S)$ skup svih konačnih linearnih kombinacija elemenata iz S, jasno je da vrijedi $S \subseteq L(S)$.
Neka je L lineal koji sadrži S. Kako vrijedi

$$(\forall x, y \in L)(\forall \lambda, \mu \in \Phi) \ \lambda x + \mu y \in L \ ,$$

jasno je da to vrijedi i za svaku konačnu linearnu kombinaciju elemenata iz Φ i L, tj. $L(S) \subseteq L$. ♣

Primjetimo ovdje da svaki lineal u sebi sadrži nula element, a to znači da je nula element sadržan u svakom linearnom vektorskom prostoru. Zato definicija disjunktnosti vektorskih prostora nije ista kao disjunktnost skupova, tj. za linearne prostore W_1 i W_2 kažemo da su disjunktni ako vrijedi

$$W_1 \cap W_2 = \{0\} \ .$$

Za lineale vrijede sljedeća tvrdjenja koja su ostavljena čitaocu za vježbu.

Lema 2.1.3. *Neka su W i W_1 podskupovi linearnog prostora V. Tada vrijedi:*

1. $W \subseteq L(W)$.
2. *Ako je* $W \subseteq W_1$, *onda je* $L(W) \subseteq L(W_1)$.
3. $L(L(W)) = L(W)$.
4. *Ako je* $W = \varnothing$, *onda je* $L(W) = \{0\}$.
5. *Ako je* $W \subseteq W_1 \subseteq L(W)$, *onda je* $L(W) = L(W_1)$.

Definicija 2.1.4. *Neka su W_1 i W_2 potprostori linearnog prostora V. Skup $W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2)$ nazivamo sumom potprostora W_1 i W_2. Za V kažemo da je direktna suma potprostora W_1 i W_2 ako vrijedi*

1. $V = W_1 \cup W_2$ *i*

2. W_1 *i* W_2 *su disjunktni.*

Direktnu sumu označavamo sa $V = W_1 \oplus W_2$*, i tada kažemo da je* W_1 *direktni komplement od* W_2 *i obrnuto.*

Lema 2.1.4. *Linearani prostor* V *je direktna suma potprostora* W_1 *i* W_2 *ako i samo ako se svaki element* $z \in V$ *na jedinstven način može prikazati kao* $z = x + y$*, gdje je* $x \in W_1$*, a* $y \in W_2$*.*

I Definicija 2.1.4 i Lema 2.1.4 mogu se produžiti na konačnu i prebrojivu familiju potprostora.

Definicija 2.1.5. *Neka je* V *linearan vektorski prostor. Za vektore* $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *kažemo da su linearno zavisni ako postoji netrivijalna kombinacija elemenata* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Phi$*, takva da važi*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \ .$$

(pod netrivijalnom kombinacijom podrazumijevamo da je bar jedan od λ_i *(*$i \in \{1, 2, ..., n\}$*) različit od nule).*
U suprotnom kažemo da su vektori $x_1, x_2, ..., x_n$ *linearno nezavisni.*
Za beskonačan skup vektora kažemo da su linearno nezavisni, ako je proizvoljna konačna kolekcija tih vektora linearno nezavisna.

Lema 2.1.5. *Neka je* V *linearan vektorski prostor i neka je* $B \subset V$ *skup linearno nezavisnih vektora. Neka je za neko* $x \in V$ *skup* $B \cup \{x\}$ *linearno zavisan, tada* $x \in L(B)$*.*

Definicija 2.1.6. *Neka je* V *linearan vektorski prostor. Skup linearno nezavisnih vektora* $B \subset V$ *nazivamo algebarskom bazom prostora* V*, ako vrijedi* $L(B) = V$*.*

Jasno je da jedan vektorski prostor može imati više baza, tj. svaki skup linearno nezavisnih vektora koji generišu čitav prostor, je baza prostora.

Teorem 2.1.6. *Svaki linearan vektorski prostor ima bazu.*

Dokaz : Neka je V linearan prostor i neka je $\mathcal{B}$ familija svih podskupova od V čiji su elementi linearno nezavisni. Kako prazan skup pripada $\mathcal{B}$ onda ta familija nije prazna. Lahko se provjerava

da je $\mathcal{B}$ parcijalno uredjena inkluzijom (unija lanca skupova u $\mathcal{B}$ je ponovo element u $\mathcal{B}$). Na osnovu Zornove leme, postoji maksimalan element B familije $\mathcal{B}$.
Pretpostavimo da sada postoji element $v \in V$ takav da $v \notin B$. To onda znači da je skup $B \cup \{v\}$ linearno zavisan, a na osnovu Leme 2.1.5 onda imamo $v \in L(B)$. Ovo znači da je $L(B) = V$, tj. B je baza prostora V. ♣

Ako je B baza prostora V i ako je $card(B) = n \in \mathbb{N}$, kažemo da je V konačno dimenzionalan prostor dimenzije n. Ukoliko je $card(B) = \aleph_0$, kažemo da je prostor beskonačno dimenzionalan.

Još u dokazu teorema o kompletiranju, imali smo priliku vidjeti kako na količničkom skupu možemo raditi kao na bilo kom drugom skupu, dfinisati operacije, metriku i sl. Uvedimo sada količnički prostor kao linearan vektorski prostor.

Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor i neka je V neki njegov potprostor. Uvedimo na X relaciju

$$x, y \in X \ , \ x \sim y \ \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} \ x - y \in V \ .$$

Trivijalno se pokazuje da je ovako uvedena relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna, a time relacija ekvivalencije. Dakle, ovako uvedenom relacijom prostor X možemo razbiti na klase ekvivalencija, a skup svih klasa ekvivalencija nazivamo količničkim skupom, i za razliku od ranije korištene oznake, ovdje ćemo taj skup iz praktičnih razloga označavati sa X/V.

U svakom količničkom skupu možemo uvesti operacije sabiranja i množenja skalarom. Zaista, neka su ξ i η proizvoljne dvije klase iz X/V. Izaberimo po jedan element iz svake od tih klasa, npr. $x \in \xi$ i $y \in \eta$. Neka je ζ ona klasa ekvivalencije koja sadrži element $x + y$. Stavimo sada da je

$$\zeta = \xi + \eta \ .$$

Analogno, za $a \in \Phi$, neka je θ ona klasa koja sadrži element ax. Množenje skalarom onda uvodimo sa

$$\theta = a\xi \ .$$

Lahko se provjerava da ovako uvedene operacije ne ovise od izbora predstavnika klasa i da zadovoljavaju aksiome vektorskog prosora. Time smo na skupu X/V definisali unutrašnju i spoljašnju kompoziciju, čime on sam za sebe postaje jedan linearan vektorski prostor.

Definicija 2.1.7. *Neka je X proizvoljan linearan vektorski prostor i V njegov potprostor. Dimenziju količničkog prostora X/V nazivamo kodimenzija potprostora V u prostoru X.*

Dokaz sljedeće jednostavne tvrdnje ostavljen je čitaocu za vježbu.

Lema 2.1.7. *Ako je X konačno dimenzionalan linearni vektorski prostor dimenzije n, a V njegov potprostor dimenzije k, onda je količnički prostor dimenzije $n-k$.*

Sljedeća tvednja je nešto opštijeg karaktera.

Teorem 2.1.8. *Neka potprostor $V \subset X$ ima kodimenziju n. Tada u X postoje elementi $x_1, x_2, ..., x_n$, takvi da za svako $x \in X$, postoji jedinstvena reprezentacija*

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n + y \ ,$$

gdje su $a_1, a_2, ..., a_n \in \Phi$ i $y \in V$.

Dokaz : Neka je kodimenzija potprostora V u X jednaka n, tj. dimenzija količničkog prostora X/V je n, pa u njemu postoje linearno nezavisni vektori $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, koji čine bazu tog prostora. Iz svake od klasa ξ_i izaberimo po jednog predstavnika x_i, te klase.
Neka je sada $x \in X$ proizvoljan i neka je ξ ona klasa ekvivalencije koja ga sadrži. Zbog baze, postoje jedinstveni $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Phi$, takvi da je

$$\xi = \lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \cdots + \lambda_n\xi_n \ .$$

Sada zaključujemo da i x i $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n$ pripadaju istoj klasi, a to znači da se ova dva elementa razlikuju do na element iz skupa V, tj. vrijedi

$$x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \cdots + \lambda_nx_n + y \ , \ y \in V \ .$$

Jedinstvenost ostaje čitaocu za vježbu. ♣

Definicija 2.1.8. *Neka je L proizvoljan potprostor linearnog vektorskog prostora X, kodimenzije 1. Za potprostor L tada kažemo da je hiperpovrš u prostoru X.*

Hiperpovrš u jednodimenzionalnom prostoru je tačka, u dvodimenzionalnom prostoru je prava, u trodimenzionalnom prostoru to je ravan itd. Generalno, u n-dimenzionalnom prostoru, hiperpovrš je generesiana nedegenerisanom linearnom jednačinom

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \ ,$$

gdje nedegenerisanost znači da nisu svi a_i jednaki 0.

2.2 Normirani prostori

Definicija 2.2.1. *Neka je X linearan vektorski prostor, na kome je definisana funkcija $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, sa sljedećim osobinama*

1. $(\forall x \in X)\ \|x\| \geq 0$.
2. $\|x\| = 0$, *ako i samo ako* $x = 0$.
3. $(\forall \lambda \in \Phi)(\forall x \in X)\ \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$.
4. $(\forall x, y \in X)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tada za funkciju $\|\cdot\|$ kažemo da je norma na X, a za X kažemo da je normiran linearan vektorski prostor.

Ako je na X definisana norma $\|\cdot\|$, izraz $\|x\|$ čitamo ”norma vektora x”.

Primjer 2.5. Primjeri normiranih prostora:

1. Za $x \in c$ ili $x \in c_0$, $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
2. Za $x \in l_p$ $(1 \leq p < \infty)$, $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
3. Za $x \in l_\infty$, $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.
4. Za $x \in C[a, b]$, $\|x\| = \max\limits_{a\leq t\leq b} |x(t)|$.
5. Za $x \in L_p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$, $\|x\| = \left(\int_\Omega |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

$\diamondsuit$

Lema 2.2.1. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor. Tada za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi*

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|\ .$$

Dokaz : Neka su $x, y \in X$ proizvoljni. Iz relacije trougla imamo

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \ ,$$

odnosno,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \ . \tag{2.1}$$

Prostom zamjenom uloga x i y, dobijamo

$$\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\| \ ,$$

ili

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \ . \tag{2.2}$$

Iz (2.1) i (2.2) dobijamo traženu nejednakost. ♣

Definišimo sada pomoću norme, funkciju $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, na sljedeći način

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad , \quad x, y \in X \ .$$

Nije teško provjeriti da ovako definisana funkcija zadovoljava sve uslove Definicije 1.1.1, pa je na ovaj način uvedena metrika na X, za koju kažemo da je inducirana normom u datom prostoru. Samim tim imamo da je svaki normiran linearan vektorski prostor ujedno i metrički prostor, te sve što je rečeno za metričke prostore vrijedi i za normirane prostore.
Tako sada imamo, za niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ kažemo da konvergira ka elementu $x_0 \in X$, ako vrijedi

$$\|x_n - x_0\| \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Niz $(x_n) \subset X$ je Cauchyjev ako vrijedi

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ .$$

Definicija 2.2.2. *Za skup A, podskup normiranog prostora X kažemo da je ograničen, ako vrijedi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in A) \ \|x\| \leq M \ .$$

Kako je svaki konvergentan niz i ograničen, to ako vrijedi $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$), onda je $\|x_n\| \leq M$, za neko $M > 0$ i za svako $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2.2. *Neka su (x_n) i (y_n) konvergentni nizovi u normiranom linearnom vektorskom prostoru X. Tada je i niz $(x_n + y_n)$ konvergentan u X.*

Dokaz : Neka $x_n \to x_0$ i $y_n \to y_0$ ($n \to \infty$), tj.

$$||x_n - x_0|| \to 0 \ , \ ||y_n - y_0|| \to 0 \ , \ n \to \infty \ . \tag{2.3}$$

Sada vrijedi

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| = \|(x_n - x_0) + (y_n - y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \ , \tag{2.4}$$

pa zbog (2.3), izraz na desnoj strani u (2.4) teži ka 0, tj. vrijedi

$$x_n + y_n \to x_0 + y_0 \ , \ (n \to \infty)$$

♣

Lema 2.2.3. *Neka je (x_n) konvergentan niz u normiranom linearnom vektorskom prostoru X i neka je (λ_n) konvergentan niz skalara. Tada je i niz $(\lambda_n x_n)$ konvergentan u X.*

Dokaz : Neka $x_n \to x_0$ i $\lambda_n \to \lambda_0$ ($n \to \infty$). Tada imamo

$$\begin{aligned}
\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| &= \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n + \lambda_0(x_n - x_0)\| \\
&\leq \|(\lambda_n - \lambda_0)x_n\| + \|\lambda_0(x_n - x_0)\| \\
&= |\lambda_n - \lambda_0| \, \|x_n\| + |\lambda_0| \, \|x_n - x_0\| \ .
\end{aligned}$$

Zbog ograničenosti niza (x_n), zaključujemo da posljednji izraz teži ka 0, kada $n \to \infty$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

♣

Ako u prostoru X imamo algebarsku bazu, tada se svaki vektor tog prostora može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze, tj. za $x \in X$

$$x = \sum_{i \in I} x_i e_i \ ,$$

gdje je $\{e_i | \ i \in I\}$ baza prostora. Skalare x_i ($i \in I$) nazivamo koordinate vektora x. Ako sada posmatramo neki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u tom prostoru, onda zajedno sa njim možemo posmatrati i nizove njegovih koordinata $(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($i \in I$).

Definicija 2.2.3. *Neka je* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u normiranom prostoru* X. *Ukoliko su svi nizovi koordinata tog niza konvergentni, tj.*

$$(\forall i \in I)\ x_i^n \to x_i^0\ ,\ (n \to \infty)\ ,$$

kažemo da niz (x_n) *konvergira po koordinatama.*

Teorem 2.2.4. *U konačno dimenzionalnim normiranim prostorima konvergencija po normi i konvergencija po koordinatama su ekvivalentne.*

Dokaz : Neka je X n-dimenzionalan normiran prostor sa bazom $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ i neka je niz $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$. Tada za svako $k \in \mathbb{N}$ imamo

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i\ .$$

Pretpostavimo da je niz (x_k) konvergentan po koordinatama, tj. neka je $x_i^k \to x_i^0$ ($k \to \infty$), za $i = 1, 2, ..., n$. Označimo sa $x^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i$, onda imamo

$$\begin{aligned} \|x_k - x^0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^0) e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^0|\, \|e_i\| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^0|\ . \end{aligned}$$

Posljednji izraz teži ka 0, kada pustimo da $k \to \infty$, pa zaključujemo da $x_k \to x_0$ ($k \to \infty$), tj. niz je konvergentan i po normi.

Pretpostavimo sada da niz (x_n) konvergira po normi elementu x^0 i neka vrijede reprezentacije tih elemenata u bazi prostora, kao što smo to uveli gore. Pokažimo da su u tom slučaju svi nizovi koordinata našeg niza ograničeni.
Pretpostavimo da to nije tačno, tj. da za neko $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ je $x_{i_0}^k \to \pm\infty$ ($k \to \infty$) (u stvari postoji podniz ovog niza ali nećemo izgubiti na opštosti ako pretpostavimo da to vrijedi za čitav niz). Ako sa σ_k označimo sumu apsolutnih vrijednosti koordinata k-tog elementa našeg niza, tj.

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} |x_i^k|\ ,$$

onda zbog učinjene pretpostavke mora biti $\sigma_k \to +\infty$ ($k \to \infty$). Formirajmo sada novi niz

$$y_k = \frac{x_k}{\sigma_k} = \sum_{i=1}^{n} y_i^k e_i \ ,$$

gdje je $y_i^k = \frac{x_i^k}{\sigma_k}$. Kako $\sigma_k \to \infty$, to onda $y_k \to 0$, jer je niz (x_k), zbog konvergencije, ograničen. Osim toga vrijedi

$$|y_i^k| = \frac{|x_i^k|}{\sigma_k} \leq 1 \ ,$$

tj. nizovi koordinata niza (y_k) su ograničeni, pa prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, postoji podniz (k_j) niza prirodnih brojeva, tako da za svako $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi

$$y_i^{k_j} \to y_i^0 \ , \ (k_j \to \infty) \ .$$

Ovo onda znači da podniz $(y_{k_j}) \subseteq (y_k)$ konvergira po koordinatama ka elementu

$$y^0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 e_i \ .$$

Medjutim, kako smo već utvrdili $y_k \to 0$ ($k \to \infty$), a onda i svaki njegov podniz mora konvergirati ka 0, tj. mora vrijediti

$$y^0 = \sum_{i=1}^{n} y_i^0 e_i = 0 \ .$$

Zbog linearne nezavisnosti vektora baze zaključujemo onda da je

$$y_i^0 = 0 \ , \quad \text{za svako } i = 1, 2, ..., n \ .$$

Ovo ipak nije moguće jer vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i^{k_j}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^{k_j}|}{\sigma_{k_j}} = 1 \ ,$$

a pri tome je

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i^{k_j}| \to \sum_{i=1}^{n} |y_i^0| = 0 \ , (k_j \to \infty) \ .$$

Dobijena kontradikcija znači da su svi nizovi

$$(x_i^k)_{k\in\mathbb{N}}\ ,\ i=1,2,...,n$$

ograničeni (preciznije, dokazali smo da su za ograničen niz, svi nizovi njegovih koordinata ograničeni).
Posmatrajmo sada niz (z_k), definisan sa

$$z_k=\frac{x_k-x^0}{\|x_k-x^0\|}\ ,\ k\in\mathbb{N}\ .$$

(Podrazumijevamo da je $\|x_k-x^0\|\neq 0$). Kako je on ograničen, jer

$$\|z_k\|=1\ ,\ \text{ za svako } k\in\mathbb{N}\ ,$$

zaključujemo da su i svi nizovi njegovih koordinata ograničeni. Dakle, nizovi

$$\left(\frac{x_i^k-x_i^0}{\|x_k-x^0\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}\ ,\ i=1,2,...,n$$

su ograničeni. Kako smo pretpostavili konvergenciju po normi, tj. $\|x_k-x^0\|\to 0$ ($k\to\infty$), gornje će biti tačno jedino u slučaju ako za svako $i=1,2,...,n$ vrijedi

$$x_i^k\to x_i^0\ ,\ (k\to\infty)\ ,$$

a ovo ne znači ništa drugo do konvergenciju po koordinatama našeg niza. ♣

Sljedećim primjerom pokazujemo da ove dvije konvergencije nisu ekvivalentne u beskonačno dimenzionalnim prostorima. Šta više, pokazuje se da je konvergencija po normi "jača" od konvergencije po koordinatama.

Primjer 2.6. Posmatrajmo u prostoru l_p ($1\leq p<\infty$) niz vektora $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je

$$e_n=(0,0,...,\underbrace{1}_{n-\text{to mjesto}},0,0,..)\ .$$

Za nizove koordinata ovih vektora vidimo da za dovoljno veliko $k\in\mathbb{N}$, je $|e_n^k-0|=0$ (za proizvoljno $k>n$), pa svi nizovi koordinata su konvergentni ka 0.
Medjutim, za $n,m\in\mathbb{N}$, $n\neq m$, vrijedi

$$\|e_n-e_m\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|e_n^i-e_m^i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}\ ,$$

pa zaključujemo da niz (e_n) nije Cauchyjev, a tim prije nije ni konvergentan. $\diamondsuit$

Iz metričkih prostora preuzimamo i definiciju kompletnosti, tj. normiran prostor je kompletan, ako je u njemu svaki Cauchyjev niz konvergentan. Sada definišimo i glavni pojam ove glave.

Definicija 2.2.4. *Kompletan, normiran, linearan vektorski prostor se naziva Banachov prostor.*

Primjer 2.7. Neki od standardnoh primjera Banachovih prostora su c, c_0, l_p $(1 \leq p \leq \infty)$, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$, na kojima su norme uvedene kao u Primjeru 2.5. $\diamondsuit$

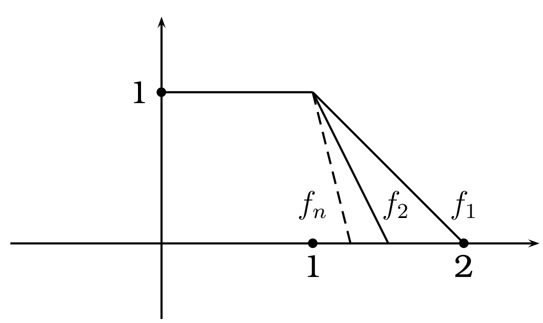
Sljedećim primjerom dajemo normiran linearan vektorski prostor koji nije Banachov.

Primjer 2.8. Posmatrajmo skup $C[0,2]$, neprekidnih funkcija na segmentu $[0,2]$. Za $x \in C[0,2]$ stavimo

$$\|x\| = \int_0^2 |x(t)|dt \ ,$$

čime smo definisali normu na $C[0,2]$.
Posmatrajmo sada sljedeći niz funkcija

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 1+n-nx & ; \quad x \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right] \\ 0 & ; \quad x \in \left(1+\frac{1}{n}, 2\right] \end{cases} \quad , \ n \in \mathbb{N} \ .$$



Za proizvoljne $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$, imamo

$$\|f_n - f_m\| = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \to 0 \ , \ (n, m \to \infty) \ .$$

Dakle, (f_n) je Cauchyjev niz. Medjutim, očigledno da $f_n \to f^*$ ($n \to \infty$), gdje je

$$f^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1) \\ 0 & ; \quad x \in [1,2] \end{cases}$$

ali $f^* \notin C[0,2]$, tj. dati Cauchyjev niz nije konvergentan. $\diamondsuit$

Kao i kod metričkih prostora i ovdje navodimo ekvivalentan teorem o kompletiranju.

Teorem 2.2.5. *Svaki normiran linearan vektorski prostor se može kompletirati, tj. za svaki normiran linearan vektorski prostor X, postoji kompletan normiran linearan vektorski prostor $\overline{X}$, takav da je X svuda gust u $\overline{X}$.*

Definicija 2.2.5. *Neka je X Banachov prostor i neka je $Y \subseteq X$. Ako je Y sam za sebe Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X, kažemo da je Y Banachov potprostor od X.*

Sama činjenica da je Y vektorski potprostor od X ne mora značiti da je on i Banachov potprostor, jer se pojam ”vektorski potprostor” odnosi samo na algebarsku strukturu, dok se pojam ”Banachov potprostor” odnosi i na algebarsku ali i na metričku strukturu skupa.

Primjer 2.9. Posmatrajmo skup $A \subset l_p$ koji u sebi sadrži sve nizove koji imaju samo konačno mnogo koordinata različitih od nule, tj.

$$x \in A \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \ .$$

Lahko se provjerava da je A vektorski potprostor od l_p. Medjutim, posmatrajmo niz

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ , \ x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, 0, ...\right) \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Očigledno $(x_n) \subset A$ i pri tome je za $n, m \in \mathbb{N}$ ($m < n$)

$$\|x_n - x_m\| = \left(\sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ , \ n, m \to \infty \ .$$

Dakle, (x_n) je Cauchyjev niz ali on nije konvergentan u A jer očigledno za niz $x^* = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi

$$\|x_n - x^*\| = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{ip}}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

tj. $x_n \to x^*$ ($n \to \infty$) ali $x^* \notin A$. $\diamondsuit$

Dokaz sljedeće proste činjenice ostavljamo čitaocu za vježbu.

Lema 2.2.6. *Svaki zatvoreni vektorski potprostor Banahovog prostora je Banachov potprostor.*

Iz linearne algebre nam je poznat stav

Teorem 2.2.7. *Svaka dva konačno dimenzionalna linearna vektorska prostora, iste dimenzije, su izomorfni.*

Dokaz : Neka su X i Y dva konačno dimenzionalna linearna vektorska prostora, dimenzije $n \in \mathbb{N}$. Ako pokažemo da je naprimjer X izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, onda kako je izomorfizam relacija ekvivalencije, tvrdjenje će biti dokazano.
Dakle, neka su vektori $e_1, e_2, ..., e_n$ baza prostora X i neka je $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ proizvoljan element iz $\mathbb{R}^n$. Definišimo preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to X$ na sljedeći način,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ .$$

Nije teško vidjeti (provjeriti!) da je f bijektivno preslikavanje. Osim toga važi,

$$f(\lambda x' + \mu x'') = \lambda f(x') + \mu f(x'') \ ,$$

pa je f izomorfizam iz $\mathbb{R}^n$ u X.

Dakle, X je izomorfan sa $\mathbb{R}^n$, a na isti način se pokazuje da je $\mathbb{R}^n$ izomorfan sa Y, pa na osnovu tranzitivnosti, zaključujemo izomorfnost prostora X i Y. $\clubsuit$

Kao direktnu posljedicu gornjeg teorema imamo sljedeća dva tvrdjenja,

Posljedica 2.2.8. *Svaki konačno dimenzionalan linearan vektorski prostor je kompletan.*

Drugačije rečeno, linearan vektorski prostor konačne dimenzije je Banachov prostor.

Posljedica 2.2.9. *Ako je Y konačno dimenzionalan potprostor normiranog prostora X, onda je Y zatvoren potprostor od X.*

Definicija 2.2.6. *Neka je X normiran linearan vektorski prostor i neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme definisane na X. Kažemo da su ove norme ekvivalentne ako postoje konstante $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tako da za svako $x \in X$, vrijedi*

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ .$$

Još jedna specifičnost konačno dimenzionalnih prostora iskazana je sa

Teorem 2.2.10. *Neka je X konačno dimenzionalan normiran prostor. Svake dvije norme, definisane na X, su ekvivalentne.*

Dokaz : Neka je X konačno dimenzionalan prostor i neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dvije norme definisane na X. Pretpostavimo da one nisu ekvivalentne. To znači da za svako $k \in \mathbb{N}$, postoji $x_k \in X$, takav da vrijedi

$$\|x_k\|_2 > k \|x\|_1 \ .$$

Na ovaj način smo definisali niz $(x_k) \subset X$. Pomoću njega definišimo novi niz $y_k = \frac{x_k}{k\|x_k\|_1}$ za koga vrijedi

$$\|y_k\|_1 = \frac{1}{k} \to 0 \ , \ (k \to \infty) \ ,$$

tj. $y_k \to 0$ po normi $|| \cdot ||_1$. Zbog toga zaključujemo da niz (y_k) konvergira i po koordinatama. Kako je X konačno dimenzionalan prostor, onda su u njemu ove dvije konvergencije ekvivalentne, pa sada iz konvergencije po koordinatama zaključujemo da je ovaj niz konvergentan i po normi $|| \cdot ||_2$. Medjutim,

$$\|y_k\|_2 = \frac{\|x_k\|_2}{k \|x_k\|_1} > 1 \ ,$$

pa očigledno nemože vrijediti $y_k \to 0$ ($k \to \infty$), a to je kontradikcija. Dakle za neko C_1 i za svako $x \in X$ vrijedi,

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \ .$$

Na analogan se način pokaže da mora vrijediti i druga nejednakost iz definicije ekvivalentnosti normi. ♣

Ovakvu situaciju, što je već za očekivati, nemamo u beskonačno dimenzionalnim prostorima. Da se u to uvjerimo, posmatrajmo sljedeći primjer.

Primjer 2.10. Neka je B[0,1] skup svih ograničenih i integrabilnih funkcija na segmentu $[0,1]$. Definišimo funkcije $\|\cdot\|_1 , \|\cdot\|_2 : B[0,1] \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ na slijedeći način,

$$x \in B[0,1] \ , \ \|x\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \ , \ \|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|dt \ .$$

Čitaocu je ostavljeno da pokaže da su ovako definisane funkcije, norme na $B[0,1]$.
Posmatrajmo niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, zadat sa

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \\ 0 & ; \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Lahko sada provjeravamo da vrijedi

$$\|f_n\|_1 = \max_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1 \ \text{ odnosno } \ \|f_n\|_2 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} dt = \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Ovo znači da je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 1 \ , \ \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0 \ ,$$

iz čega je očigledna neekvivalentnost definisanih normi na $B[0,1]$.
$\diamondsuit$

U razmatranju osobine kompaktnosti u metričkim prostorima, vidjeli smo da je svaki relativno kompaktan skup ograničen i da je svaki kompaktan skup zatvoren. Kod konačno dimenzionalnih prostora to su i dovoljni uslovi.

Teorem 2.2.11. *Neka je X konačno dimenzionalan normiran prostor. Da bi skup $A \subseteq X$ bio relativno kompaktan potrebno je i dovoljno da je on ograničen skup.*

Dokaz : Na osnovu Teorema 1.6.3 imamo potrebne uslove.
Dokažimo neophodnost. Neka je A ograničen podskup od X i neka je (x_n) proizvoljan niz u A. Kako su to ujedno elementi prostora X, a ovaj je dimenzije n, to vrijedi,

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k e_i \ ,$$

gdje su e_i ($i = 1, 2, ..., n$) vektori baze prostora X. Zbog ograničenosti niza i nizovi njegovih koordinata su ograničeni, pa za svako $i = 1, 2, ..., n$, postoji podniz $(x_i^{k_j}) \subset (x_i^k)$, takav da

$$x_i^{k_j} \to x_i^0 \ , \ (j \to \infty) \ .$$

Ovo znači da podniz $(x_{k_j}) \subset (x_k)$ konvergira po koordinatama, pa na osnovu Teorema 2.2.4, taj je podniz i konvergentan.
Iz proizvoljnog niza smo izdvojili konvergentan podniz, dakle A je relativno kompaktan skup. ♣

Teorem 2.2.12. *Neka je X konačno dimenzionalan normiran prostor. Da bi skup $A \subseteq X$ bio kompaktan potrebno je i dovoljno da je on ograničen i zatvoren skup.*

Sljedećom teoremom dobijamo objašnjenje zašto tvrdjenje Teorem 2.2.11 nije tačno u beskonačno dimenzionalnim prostorima. Nazivamo je Rieszovom teoremom ili ”teorem o skoro normali”.

Teorem 2.2.13. *Neka je L neprazan pravi podprostor Banachovog prostora X. Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $x_\varepsilon \in X$, za koga vrijedi*

$$||x_\varepsilon|| = 1 \quad \textit{i} \quad d(x_\varepsilon, L) \geq 1 - \varepsilon \ .$$

Dokaz : Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno zadat. Kako je L pravi podprostor od X, postoji $x_0 \in X \setminus L$. Zbog zatvorenosti L tada vrijedi

$$d(x_0, L) = d > 0 \ .$$

Kako je po definiciji

$$d(x_0, L) = \inf_{x \in L} ||x - x_0|| \ ,$$

postoji niz $(x_n) \subset L$, takav da je zadovoljeno

$$||x_n - x_0|| = d_n \longrightarrow d > 0 \ , \ (n \longrightarrow \infty) \ .$$

Ne gubeći na opštosti, možemo smatrati da je $d_n > 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Formirajmo sada niz

$$y_n = \frac{1}{d_n}(x_n - x_0) \ ,$$

za koga očigledno vrijedi $||y_n|| = 1$, za $n \in \mathbb{N}$. Neka je sada $x \in L$ proizvoljan, onda imamo

$$||y_n - x|| = \frac{||x_0 - x_n - d_n x||}{d_n} = \frac{||x_0 - (x_n + d_n x)||}{d_n} \ ,$$

a kako je L podprostor, to $x_n + d_n x \in L$. Zato možemo zaključiti

$$||y_n - x|| \geq \frac{1}{d_n} \inf_{y \in L} ||x_0 - y|| = \frac{d}{d_n} \ .$$

Kako $d_n \longrightarrow d$ ($n \longrightarrow \infty$), postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{d}{d_n} > 1 - \varepsilon \ .$$

Uzimajući da je $x_\varepsilon = y_{n_0}$, zaključujemo da je $||x_\varepsilon - x|| > 1 - \varepsilon$, za svako $x \in L$. Kako desna strana posljednje nejednakosti ne ovisi o $x \in L$, uzimajući infimum dobijamo

$$d(x_\varepsilon, L) = \inf_{x \in L} ||x_\varepsilon - x|| \geq 1 - \varepsilon \ ,$$

što je i trebalo dokazati. ♣

Na osnovu Rieszove teoreme sada jednostavno zaključujemo da u svakom beskonačno dimenzionalnom Banachovom prostoru postoje ograničeni skupovi koji nisu relativno kompaktni. Zaista, neka je X proizvoljan beskonačno dimenzionalan prostor i neka je $x_1 \in X$ proizvoljan, takav da je $||x_1|| = 1$. Posmatrajmo

$$L_1 = \{x \in X |\ x = \lambda x_1 \ , \ \lambda \in \Phi\} \ .$$

Tada je očigledno $L \subset X$ i $dim(L) = 1$. Kako je $X \neq L$, prema Rieszovoj teoremi postoji $x_2 \in X \setminus L$, takav da je $||x_2|| = 1$ i $d(x_2, L_1) \geq \frac{1}{2}$, a tim prije je zadovoljeno $||x_2 - x_1|| \geq \frac{1}{2}$. Označimo sada sa L_2 lineal nad vektorima x_1 i x_2. $dim(L_2) = 2$ pa je opet $X \neq L_2$, te na osnovu Rieszove teoreme postoji $x_3 \in X \setminus L_2$, $||x_3|| = 1$ i $d(x_3, L_2) \geq \frac{1}{2}$. Lahko provjeravamo da će vrijediti

$$||x_3 - x_1|| \geq \frac{1}{2} \text{ i } ||x_3 - x_2|| \geq \frac{1}{2} \ .$$

Nastavimo li ovaj postupak, dobićemo niz (x_n) sa osobinama

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ ||x_n|| = 1 \quad , \quad (\forall n, m \in \mathbb{N}, \ n \neq m) \ ||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2} \ .$$

Zbog prve osobine dobijeni niz je očigledno ograničen, a zbog druge osobine iz njega očigledno nemožemo izdvojiti niti jedan konvergentan podniz. Dakle, skup $\{x_n |\ n \in \mathbb{N}\}$ je ograničen ali nije relativno kompaktan.

Pokažimo još jednu specifičnu vezu izmedju potprostora zadatog Banachovog prostora

Teorem 2.2.14. *Neka je X Banachov prostor i neka su L_1 i L_2 disjunktni potprostori od X. Ako je bar jedan od potprostora konačne dimenzije, tada je i $L_1 \oplus L_2$ potprostor od X.*

Dokaz : Neka su $L_1, L_2 \subseteq X$ disjunktni, tj. $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ i neka je recimo L_1 konačne dimenzije. Označimo sa $L = L_1 \oplus L_2$. Za L znamo da je vektorski potprostor od X, pa nam ostaje pokazati da on mora biti zatvoren. Neka je (x_n) proizvoljan niz u L, takav da $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$). Pokažimo da $x_0 \in L$. Kako je L direktna suma, to za svako $n \in \mathbb{N}$, postoje $x'_n \in L_1$ i $x''_n \in L_2$, takvi da je $x_n = x'_n + x''_n$. Pretpostavimo sada da je na ovaj način formirani niz (x'_n), neograničen, tj. $\|x'_n\| \to +\infty$ ($n \to \infty$). Formirajmo nove nizove na sljedeći način,

$$y_n = \frac{x_n}{\|x'_n\|}\ ,\ y'_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|}\ ,\ y''_n = \frac{x''_n}{\|x'_n\|}\ .$$

Kako je niz (x_n) konvergentan, on je i ograničen, pa zaključujemo da $y_n \to 0$ ($n \to \infty$).
Za niz (y'_n) vrijedi, $\|y'_n\| = 1$, tj. on je ograničen niz u konačno dimenzionalnom prostoru, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz (y'_{n_k}). Kako je

$$y_n = \frac{x_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n + x''_n}{\|x'_n\|} = y'_n + y''_n\ ,$$

onda vrijedi i

$$y_{n_k} = y'_{n_k} + y''_{n_k}\ . \tag{2.5}$$

Sada zbog konvergencije nizova (y_{n_k}) i (y'_{n_k}), zaključujemo da takav mora biti i niz (y''_{n_k}). Neka je $y'_{n_k} \to y'_0$ i $y''_{n_k} \to y''_0$ ($k \to \infty$). Iz (2.5), puštajući da $k \to \infty$, imamo

$$0 = y'_0 + y''_0\ ,$$

pri čemu, zbog zatvorenosti potprostora, vrijedi $y'_0 \in L_1$ i $y''_0 \in L_2$. Kako su ovi potprostori disjunktni, iz posljednjeg zaključujemo da mora vrijediti $y'_0 = y''_0 = 0$. Dakle, $y'_{n_k} \to 0$ ($k \to \infty$), ali to je nemoguće zbog činjenice da je $\|y'_n\| = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dakle, niz (x'_n) je ograničen niz, pa iz njega možemo izdvojiti konvergentan podniz (x'_{n_k}) i neka je $x'_{n_k} \to x'_0 \in L_1$ ($k \to \infty$). Jasno je sada da zbog činjenice $x_{n_k} = x'_{n_k} + x''_{n_k}$, i konvergencije nizova (x_{n_k}) i (x'_{n_k}), mora i niz (x''_{n_k}) biti konvergentan. Neka je $x''_{n_k} \to x''_0 \in L_2$ ($n \to \infty$). Sada jednakost

$$x_{n_k} = x'_{n_k} + x''_{n_k}\ ,$$

puštajući da $k \to \infty$, prelazi u jednakost

$$x_0 = x_0' + x_0'' \ ,$$

pri čemu su $x_0' \in L_1$ i $x_0'' \in L_2$, pa zaključujemo da $x_0 \in L$. Dakle, L sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, pa je kao takav, zatvoren potprostor, tj. Banachov potprostor od X. ♣

Da direktna suma proizvoljnih potprostora nemora biti potprostor, pokažimo primjerom.

Primjer 2.11. U prostoru l_2 posmatrajmo podskupove L_1 i L_2 zadate sa

$$L_1 = \{(\xi_n) \in l_2 |\ \xi_{2n} = 0 \ ,\ n \in \mathbb{N}\} \ ,\ L_2 = \left\{(\eta_n) \in l_2 |\ \eta_{2n} = \frac{\eta_{2n-1}}{n^r}, n \in \mathbb{N},\ r > \frac{1}{2}\right\} \ .$$

Lahko se provjerava da su L_1 i L_2 linearni vektorski potprostori od l_2 i da su disjunktni, tj. $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Posmatrajmo sada nizove (x_n) i (y_n) zadate sa

$$x_n = (\xi_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ ,\ \xi_i^n = \begin{cases} 0 & ;\ \ i = 2k \\ 1 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = 1,2,...,n \\ 0 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = n+1, n+2, ... \end{cases}$$

$$y_n = (\eta_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ ,\ \eta_i^n = \begin{cases} -1 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = 1,2,...,n \\ 0 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = n+1, n+2, ... \\ -\frac{1}{k^r} & ;\ \ i = 2k,\ k = 1,2,...,n \\ 0 & ;\ \ i = 2k,\ k = n+1, n+2, ... \end{cases}$$

Jasno je da $x_n \in L_1$, a $y_n \in L_2$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Označimo $L = L_1 \oplus L_2$ i stavimo da je $z_n = x_n + y_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Tada je niz (z_n) zadat sa

$$z_n = (\zeta_i^n)_{i\in\mathbb{N}} \ ,\ \zeta_i^n = \begin{cases} 0 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = 1,2,... \\ -\frac{1}{k^r} & ;\ \ i = 2k,\ k = 1,2,...,n \\ 0 & ;\ \ i = 2k,\ k = n+1, n+2, ... \end{cases}$$

Očigledno $z_n \to z_0$ ($n \to \infty$), gdje je

$$z_0 = (\zeta_i^0)_{i\in\mathbb{N}} \ ,\ \zeta_i^0 = \begin{cases} 0 & ;\ \ i = 2k-1,\ k = 1,2,... \\ -\frac{1}{k^r} & ;\ \ i = 2k,\ k = 1,2,... \end{cases}$$

$z_0 \in l_2$ jer je

$$\|z_0\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\zeta_i^0|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^{2r}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \ .$$

Medjutim, $z_0 \notin L$. Zaista, ako bi to bio slučaj, postojali bi $x_0 \in L_1$ i $y_0 \in L_2$, takvi da je $z_0 = x_0 + y_0$. Ali tada bi moralo biti

$$x_0 = (1, 0, 1, 0, ..., 1, 0, ...) \ , \ y_0 = \left(-1, -\frac{1}{1^r}, -1, -\frac{1}{2^r}, ..., -1, -\frac{1}{k^r}, ...\right) \ .$$

Očigledno $x_0 \notin L_1$ i $y_0 \notin L_2$, pa dakle i $z_0 \notin L$.
Dakle, postoji niz $(z_n) \subset L$, takav da $z_n \to z_0$ ($n \to \infty$), a $z_0 \notin L$, pa zaključujemo da L nije potprostor od l_2.

$\diamondsuit$

Glava 3

Linearani operatori

Neka su X i Y dva proizvoljna prostora. Preslikavanje $A : X \to Y$ nazivamo operator, pri čemu koristimo standardnu definiciju preslikavanja. Dakle, pod terminom operator podrazumijevamo najopštiji oblik preslikavanja, tj. kada se područje originala nalazi u proizvoljnom prostoru X, a područje slika u proizvoljnom prostoru Y. Sa $D_A \subseteq X$ ćemo označavati domen preslikavanja operatora A i podrazumijevamo da je on linearan vektorski prostor. Sa $R_A \subseteq Y$ označavamo područje slika ili kodomen operatora A. Za $x \in X$, djelovanje operatora A uobičajeno ćemo zapisivati sa Ax, umjesto $A(x)$.

3.1 Ograničenost i neprekidnost

Definicija 3.1.1. *Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je aditivan ako i samo ako za proizvoljne $x_1, x_2 \in D_A$, vrijedi*

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \ .$$

Definicija 3.1.2. *Za operator $A : X \to Y$ kažemo da je homogen ako i samo ako vrijedi*

$$(\forall x \in D_A)(\forall \lambda \in \Phi) \ A(\lambda x) = \lambda Ax \ .$$

Definicija 3.1.3. *Za operator $A : D_A \subseteq X \to Y$ kažemo da je linearan operator ako i samo ako je on istovremeno aditivan i homogen, tj. ako vrijedi*

$$(\forall x_1, x_2 \in D_A)(\forall \lambda, \mu \in \Phi) \ A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda Ax_1 + \mu Ax_2 \ .$$

Lema 3.1.1. *Za proizvoljan linearan operator vrijede osobine:*

1. $A0 = 0$.
2. $A(-x) = -Ax$.

Dokaz :

1. Iz osobina linearnog vektorskog prostora i linearnosti operatora imamo
$$Ax = A(x + 0) = Ax + A0 \ ,$$
a zbog jedinstvenosti neutralnog elementa za sabiranje imamo $A0 = 0$.

2. Koristeći gornju osobinu i linearnost operatora, imamo
$$0 = A0 = A(x + (-x)) = Ax + A(-x) \ ,$$
iz čega je zbog jedinstvenosti inverznog elementa za sabiranje onda $A(-x) = -Ax$.

♣

Definicija 3.1.4. *Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako i samo ako za svaku okolinu V tačke Ax_0, postoji okolina U tačke x_0, tako da je za svako $x \in U$, $Ax \in V$.*

Ako su X i Y metrički prostori, gornju definiciju iskazujemo sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon) \ ,$$

a u normiranim prostorima sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \in D_A)(||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||Ax - Ax_0||_Y < \varepsilon) \ .$$

Kažemo da je linearan operator neprekidan na skupu D ako je neprekidan u svakoj tački skupa D.

Za definisanje pojma neprekidnosti možemo koristiti i nizovnu definiciju.

Definicija 3.1.5. *Za linearan operator $A : X \to Y$ kažemo da je neprekidan u tački $x_0 \in D_A$ ako za proizvoljan niz $(x_n) \subset X$, takav da $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, vrijedi*

$$Ax_n \to Ax_0 \ , \ (n \to \infty) \ .$$

Teorem 3.1.2. *Ako je aditivan operator $A : X \to Y$ neprekidan u jednoj tački domena, onda je on neprekidan na čitavom domenu.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ aditivan operator i neka je $x_0 \in D_A$ tačka u kojoj je operator neprekidan. Neka je sada $x \in D_A$ proizvoljan. Uzmimo proizvoljan niz $(x_n) \subset D_A$, takav da $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Posmatrajmo niz $(x_n - x + x_0) \subset D_A$. Očigledno vrijedi

$$x_n - x + x_0 \to x_0\ ,\ (n \to \infty)\ ,$$

pa zbog neprekidnosti operatora u tački x_0 imamo

$$A(x_n - x + x_0) \to Ax_0\ ,\ (n \to \infty)\ .$$

Na osnovu aditivnosti i osobina limesa, sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A(x_n - x + x_0) &= \lim_{n\to\infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) \\
&= \lim_{n\to\infty} Ax_n - Ax + Ax_0 \\
&= Ax_0\ ,
\end{aligned}$$

iz čega je onda

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax\ ,$$

tj. operator je neprekidan i u tački x. Zbog proizvoljnosti $x \in D_A$, zaključujemo da je A neprekidan na čitavom skupu D_A. ♣

Definicija 3.1.6. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A ograničen linearan operator ako važi*

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X)\ \|Ax\|_Y \le M\,\|x\|_X\ . \tag{3.1}$$

Infimum svih mrojeva M za koje važi (3.1) nazivamo norma operatora A i označavamo je sa $\|A\|_{X\to Y}$ ili jednostavno sa $\|A\|$, podrazumijevajući djelovanje operatora. Linearan operator je ograničen ukoliko mu je norma konačna i pri tome onda vrijedi

$$(\forall x \in X)\ \|Ax\|_Y \le \|A\|_{X\to Y}\,\|x\|_X\ .$$

Teorem 3.1.3. *Neka je $A : X \to Y$ ograničen homogen operator. Tada vrijedi*

$$\|A\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|\ .$$

Dokaz : Označimo sa

$$\alpha = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ .$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $x' \in X \setminus \{0\}$, takav da je $\|Ax'\| / \|x'\| > \alpha - \varepsilon$, tj. $\|Ax'\| > (\alpha - \varepsilon)\|x'\|$. Na osnovu definicije norme operatora onda imamo $\|A\| > \alpha - \varepsilon$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, odnosno $\|A\| \geq \alpha$. Ako bi bilo $\|A\| > \alpha$, tada bi za neko $\varepsilon > 0$ vrijedilo $\|A\| - \alpha = \varepsilon$. Tada bi iz $\alpha < \|A\| - \varepsilon/2$ imali

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha < \|A\| - \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

tj. za svako $x \in X \setminus \{0\}$ bi vrijedilo

$$\|Ax\| \leq \left(\|A\| - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|x\| \ .$$

Posljednje nije u saglasnosti sa tim da je norma operatora infimum svih brojeva koji zadovoljavaju (3.1), pa dakle mora vrijediti

$$\|A\| = \alpha = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ .$$

Zbog homogenosti operatora dalje imamo

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \ .$$

Ostaje još pokazati drugu jednakost. Naime, ako posmatramo samo elemente koji zadovoljavaju $\|x\| \leq 1$, tada imamo

$$\|A\| = \alpha = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \ .$$

Sa druge strane, kako je supremum na većem skupu veći, to vrijedi

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| \ ,$$

pa zaključujemo da mora biti

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \ .$$

♣

Za linearna preslikavanja vrijedi sljedeća ”lijepa” osobina.

Teorem 3.1.4. *Linearan operator je neprekidan ako i samo ako je ograničen.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ neprekidan linearan operator. Pretpostavimo da on nije ograničen. Tada

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in X,\ \|x_n\| = 1)\ \ \|Ax_n\| > n\ .$$

Posmatrajmo sada sljedeći niz,

$$z_n = \frac{x_n}{n}\ ,\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Za njega vrijedi

$$\|z_n\| = \frac{\|x_n\|}{n} = \frac{1}{n} \to 0\ ,\ n \to \infty\ ,$$

tj. $z_n \to 0$ ($n \to \infty$). Ali tada imamo

$$\|Az_n\| = \frac{1}{n}\,\|Ax_n\| \geq 1\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

a to znači da $Az_n \nrightarrow 0$ ($n \to \infty$), što je u suprotnosti sa neprekidnošću operatora.

Neka je sada A ograničen operator, tj. $\|A\| < +\infty$. Uzmimo proizvoljno $x \in D_A$ i neka je $(x_n) \subset D_A$, takav da $x_n \to x$ ($n \to \infty$). Zbog ograničenosti sada imamo

$$0 \leq \|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq \|A\|\,\|x_n - x\| \to 0\ ,\ n \to \infty\ .$$

Dakle, A je neprekidan u tački x, pa je prema Teoremi 3.1.2, on neprekidan operator. ♣

Teorem 3.1.5. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Operator A je neprekidan ako i samo ako ograničene skupove iz X preslikava u ograničene skupove u Y.*

Dokaz : Neka je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator, tj.

$$(\forall x \in X)\ \ \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|\ \ ,\ (\|A\| < \infty)$$

i neka je $S \subset X$ ograničen skup, tj.

$$(\exists M > 0)(\forall x \in S)\ \ \|x\| \leq M\ .$$

Označimo sa S' sliku skupa S,

$$S' = \{Ax|\ x \in S\}\ .$$

Za proizvoljno $y \in S'$ tada vrijedi

$$\|y\| = \|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\| \leq M\,\|A\| = M' < \infty\ ,$$

te je S' ograničen skup.

Neka A slika ograničene skupove u ograničene skupove. Kako je jedinična kugla $K = \{x \in X|\ \ \|x\| \leq 1\}$, ograničen skup u X, to je i skup

$$AK = \{Ax|\ \ \|x\| \leq 1\}$$

ograničen u Y, a to znači

$$(\exists M > 0)(\forall y \in AK)\ \ \|y\| \leq M\ ,$$

odnosno

$$(\exists M > 0)(\forall x \in X,\ \|x\| \leq 1)\ \ \|Ax\| \leq M\ .$$

Posljednja činjenica nije ništa drugo do ograničenost operatora ili što je ekvivalentno, njegova neprekidnost. ♣

Skup svih ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa prostora X u prostor Y označavat ćemo sa $\mathcal{L}(X,Y)$. Na $\mathcal{L}(X,Y)$ možemo definisati operacije sabiranja i množenja skalarom. Neka su $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ i neka je $\lambda \in \Phi$. Za $x \in X$ definišemo

$$(A+B)x \stackrel{def}{=} Ax + Bx\ ,\ (\lambda A)x \stackrel{def}{=} \lambda Ax\ .$$

Pri tome je $D_{A+B} = D_A \cap D_B$ i $D_{\lambda A} = D_A$.

Neka su $x, y \in X$ i $\lambda, \mu, \alpha \in \Phi$. Tada imamo

$$\begin{aligned} (A+B)(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y) + B(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda Ax + \mu Ay + \lambda Bx + \mu By \\ &= \lambda(A+B)x + \mu(A+B)y\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha A(\lambda x + \mu y) &= \alpha(\lambda Ax + \mu Ay) \\ &= \alpha\lambda Ax + \alpha\mu Ay \\ &= \lambda(\alpha A)x + \mu(\alpha A)y\ . \end{aligned}$$

Dakle, $A+B$ i αA su linearni operatori. Osim toga vrijedi

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq (\|A\| + \|B\|)\,\|x\|\ \ ,\ x \in X\ ,$$

i

$$\|(\alpha A)x\| \leq |\alpha| \, \|A\| \, \|x\| \ ,$$

pa zaključujemo da su oni i ograničeni operatori, tj. $A + B, \alpha A \in \mathcal{L}(X, Y)$, čime smo pokazali da je $\mathcal{L}(X, Y)$ linearan vektorski prostor. Šta više, vrijedi

Teorem 3.1.6. *Neka je X proizvoljan normiran prostor i Y Banachov prostor. $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachov prostor.*

Dokaz : Već smo pokazali da je $\mathcal{L}(X, Y)$ linearan vektorski prostor. Kako je svaki $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ograničen operator, onda je veličina

$$\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ , \tag{3.2}$$

dobro definisana. Pri tome vrijedi:

1. $0 \leq \|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < +\infty$.
2. $$\begin{aligned} \|A\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \|Ax\| \leq 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \|Ax\| = 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad Ax = 0 \ , \ x \in X \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad A \equiv 0 \ . \end{aligned}$$
3. Za $\lambda \in \Phi$,
$$\|\lambda A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(\lambda A)x\|}{\|\lambda x\|} = |\lambda| \sup_{y \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} = |\lambda| \, \|A\| \ .$$
4. $\|(A + B)x\| \leq (\|A\| + \|B\|) \, \|x\|$, tj.
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \ .$$

Dakle, sa (3.2) je definisana norma na $\mathcal{L}(X, Y)$, te je $\mathcal{L}(X, Y)$ normiran prostor.

Neka je sada $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, proizvoljan Cauchyjev niz, tj. neka je

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \ , \ n, m \to \infty \ .$$

Tada za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \to 0 \ , \ n, m \to \infty \ ,$$

odnosno, za svaki $x \in X$, niz $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ je Cauchyjev niz. Zbog kompletnosti prostora Y, ovi nizovi su konvergentni. Označimo sa

$$A_0 x = \lim_{n \to \infty} A_n x \ , \ x \in X \ .$$

Neka su $x, y \in X$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada,

$$\begin{aligned} A_0(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n \to \infty} A_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n \to \infty} (\alpha A_n x + \beta A_n y) \\ &= \alpha \lim_{n \to \infty} A_n x + \beta \lim_{n \to \infty} A_n y \\ &= \alpha A_0 x + \beta A_0 y \ , \end{aligned}$$

pa je A_0 linearan operator. Iz cauchyjevosti niza (A_n) imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N}) \left(n, m \geq n_0 \Rightarrow \|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \right) \ .$$

Ako je $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, onda za $n, m \geq n_0$ vrijedi

$$\|(A_n - A_m)x\| \leq \|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Držimo li n fiksnim, a pustimo da m teži u beskonačnost, dobijamo iz posljednjeg

$$\|(A_n - A_0)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

ili

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|(A_n - A_0)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \ .$$

Dakle, za svako $n \geq n_0$, operator $A_n - A_0$ je ograničen, pa kako su A_n ograničeni operatori, takav mora biti i operator A_0, tj. $A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Osim toga iz gornjeg imamo

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \|A_n - A_0\| < \varepsilon) \ ,$$

što ne znači ništa drugo nego da $A_n \to A_0$ ($n \to \infty$), tj. niz (A_n) je konvergentan u $\mathcal{L}(X, Y)$ odnosno, $\mathcal{L}(X, Y)$ je kompletan prostor. Iz svega rečenog imamo da je $\mathcal{L}(X, Y)$ Banachov prostor. ♣

3.2 Inverzni operator

Neka je $A : X \to Y$ linearan operator čiji je domen $D_A \subseteq X$ i kodomen $R_A \subseteq Y$. Ukoliko za svako $y \in R_A$, jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x \in D_A$, onda kažemo da postoji inverzno preslikavanje, u oznaci A^{-1}, preslikavanja A i zapisujemo $x = A^{-1}y$. Pri tome je $D_{A^{-1}} = R_A$ i $R_{A^{-1}} = D_A$. Dakle, za postojanje inverznog operatora linearnog operatora $A : D_A \to R_A$, dovoljno je da A bude injektivno preslikavanje.

Teorem 3.2.1. *Ako postoji, inverzni operator linearnog operatora je i sam linearan operator.*

Dokaz : Neka postoji inverzni operator i neka su $y_1, y_2 \in D_{A^{-1}} = R_A$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada postoje jednoznačni $x_1, x_2 \in D_A$, takvi da je $Ax_1 = y_1$ i $Ax_2 = y_2$, a ovo znači i $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$. Sada imamo,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) &= A^{-1}(\alpha A x_1 + \beta A x_2) \\ &= A^{-1}A(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha x_1 + \beta x_2 \\ &= \alpha A^{-1} y_1 + \beta A^{-1} y_2 \ . \end{aligned}$$

♣

Teorem 3.2.2. *Ako postoji inverzni operator operatora A, onda vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Dokaz: vježba.

Teorem 3.2.3. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. A ima ograničen inverzan operator na R_A ako i samo ako vrijedi*

$$(\exists m > 0)(\forall x \in X) \ \ \|Ax\| \geq m\,\|x\| \ . \tag{3.3}$$

Pri tome vrijedi $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$.

Dokaz : Neka A ima ograničen inverzni operator, tj. neka vrijedi

$$(\exists M > 0)(\forall y \in R_A) \ \ \left\|A^{-1}y\right\| \leq M\,\|y\| \ .$$

Kako za svako $y \in R_A$, postoji $x \in D_A$ tako da je $A^{-1}y = x$, gornju činjenicu možemo iskazati i sa

$$(\exists M > 0)(\forall x \in D_A) \ \ \|x\| \leq M\,\|Ax\| \ ,$$

odnosno stavljajući da je $m = \frac{1}{M}$ imamo

$$(\exists m > 0)(\forall x \in D_A) \ \|Ax\| \geq m \|x\| \ .$$

Neka sada vrijedi (3.3) pri čemu $A : X \to R_A \subseteq Y$. Neka je $Ax = 0$ za neko $x \in X$. Tada na osnovu (3.3) vrijedi

$$0 = \|Ax\| \geq m \|x\| \ ,$$

a odavde je onda $\|x\| = 0$, te je $x = 0$. Dakle, A ima inverzni operator $A^{-1} : R_A \to X$, pa jednačina $y = Ax$ ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}y$. Na osnovu ovoga, iz (3.3) onda imamo

$$(\exists m > 0)(\forall y \in R_A) \ \|y\| \geq m \left\|A^{-1}x\right\| \ ,$$

ili

$$(\exists m > 0)(\forall y \in R_A) \ \left\|A^{-1}y\right\| \leq \frac{1}{m} \|y\| \ .$$

Ovo znači da je operator A^{-1} ograničen, a osim toga, prema definiciji ograničenosti operatora, zaključujemo i da vrijedi

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{1}{m} \ .$$

♣

Lema 3.2.4. *Neka je M svuda gust skup u Banachovom prostoru X. Tada se svaki nenula vektor $x \in X$ može prikazati u formi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \ ,$$

gdje su $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), takvi da je

$$\|x_n\| \leq \frac{3}{2^n} \|x\| \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Dokaz : Neka je $x \in X$ proizvoljan. Kako je M svuda gust u X, postoji $x_1 \in M$, takav da je $\|x - x_1\| \leq \frac{\|x\|}{2}$. Sada vektor $x - x_1 \in X$, pa opet zbog svuda gustosti skupa M, postoji $x_2 \in M$, takav da je $\|x - x_1 - x_2\| \leq \frac{\|x\|}{2^2}$. Na isti način, postoji $x_3 \in M$, takav da je $\|x - x_1 - x_2 - x_3\| \leq \frac{\|x\|}{2^3}$ odnosno, postoji $x_n \in M$, takav da je

$$\|x - x_1 - x_2 - \cdots - x_n\| \leq \frac{\|x\|}{2^n} \ .$$

Zbog načina izbora elemenata $x_n \in M$ ($n \in \mathbb{N}$), vrijedi

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \to 0 \ , \ n \to \infty \ ,$$

tj. red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira ka elementu x.

Pri tome vrijede sljedeće ocjene normi,

$$\begin{aligned} \|x_1\| &= \|x_1 - x + x\| \le \|x_1 - x\| + \|x\| \le \frac{3}{2}\|x\| \ , \\ \|x_2\| &= \|x_2 + x_1 - x + x - x_1\| \le \|x_2 + x_1 - x\| + \|x - x_1\| \le \frac{3}{2^2}\|x\| \ , \end{aligned}$$

ili za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \|x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - x + x - x_1 - \cdots - x_{n-1}\| \\ &\le \|x_n + x_{n-1} + \cdots + x_1 - x\| + \|x - x_1 - \cdots - x_{n-1}\| \\ &\le \frac{3}{2^n}\|x\| \ . \end{aligned}$$

♣

Teorem 3.2.5. ***(Banachov teorem o inverznom operatoru)*** *Neka je A ograničen linearan operator koji obostrano jednoznačno preslikava Banachov prostor X na Banachov prostor Y. Tada je i inverzni operator A^{-1} takodje ograničen.*

Dokaz : Zbog pretpostavki teorema, preslikavanje A je bijektivno, pa inverzni operator A^{-1} postoji. Posmatrajmo u prostoru Y skupove

$$M_k = \left\{ y \in Y | \ \left\| A^{-1} y \right\| \le k \|y\| \right\} \ , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Pretpostavimo da postoji $y_0 \in Y$ ($y \neq 0$), takav da $y_0 \notin M_k$, niti za jedno $k \in \mathbb{N}$. Tada bi vrijedilo $\|A^{-1}y_0\| > k\|y_0\|$ za sve $k \in \mathbb{N}$, odnosno

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \|Ax_0\| < \frac{1}{k}\|x_0\| \ (Ax_0 = y_0) \ .$$

Iz toga onda imamo da je $\|Ax_0\| = 0$, tj. $Ax_0 = 0 = y_0$, a što je u suprotnosti sa pretpostavkom da y_0 nije nula element.
Dakle, vrijedi

$$Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \ .$$

Zbog kompletnosti prostora Y, na osnovu Berove teoreme o kategorijama, bar jedan od skupova M_k, recimo M_n, je gust u nekoj kugli B. Unutar kugle B, posmatrajmo prsten

$$P = \{z \in B |\ \alpha < \|z - y'\| < \beta\}\ ,$$

gdje je $0 < \alpha < \beta$, a $y' \in M_n$ proizvoljan. Translirajmo prsten P, tako da mu centar bude u 0, tako dobijamo skup

$$P_0 = \{z |\ \alpha < \|z\| < \beta\}\ .$$

Neka je sada $z \in P \cap M_n$, tada $z - y' \in P_0$ i pri tome vrijedi

$$\begin{aligned}
\left\|A^{-1}(z - y')\right\| &\leq \left\|A^{-1}z\right\| + \left\|A^{-1}y'\right\| \\
&\leq n(\|z\| + \|y'\|) \\
&\leq n(\|z - y'\| + 2\|y'\|) \\
&= n\|z - y'\|\left(1 + \frac{2\|y'\|}{\|z - y'\|}\right) \\
&\leq n\|z - y'\|\left(1 + \frac{2\|y'\|}{\alpha}\right)\ .
\end{aligned}$$

Izraz $n\left(1 + \frac{2\|y'\|}{\alpha}\right)$ ne zavisi od z i ako stavimo da je

$$N = 1 + n\left\lfloor 1 + \frac{2\|y'\|}{\alpha}\right\rfloor\ ,$$

zaključujemo da $z - y' \in M_N$. Kako je M_n gust u B, a time i u P, to je skup M_N gust u P_0.

Neka je sada $y \in Y$ proizvoljan nenula element. Moguće je izabrati $\lambda \in \Phi$, takav da je $\alpha < \|\lambda y\| < \beta$, tj. da je $\lambda y \in P_0$. Kako je M_N gust u P_0, postoji niz $(y_k) \subset M_N$ koji konvergira ka λy. Tada niz $(\frac{1}{\lambda}y_k)$ konvergira ka y, a zbog činjenice da $\frac{1}{\lambda}y_k \in M_N$ ($k \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq 0$), zaključujemo da je M_N gust i u $Y \setminus \{0\}$, odnosno i u Y.

Neka je opet y proizvoljan nenula element iz Y. Kako je M_N gust u Y, na osnovu Leme 3.2.4, postoje $y_k \in M_N$ ($k \in \mathbb{N}$), takvi da je

$$y = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k\ ,\ \|y_k\| \leq \frac{3}{2^k}\|y\|\ .$$

Stavimo $x_k = A^{-1}y_k \in X$ ($k \in \mathbb{N}$). Kako vrijedi

$$\|x_k\| = \left\|A^{-1}y_k\right\| \leq N\|y_k\| \leq \frac{3N\|y\|}{2^k}\ ,$$

to red $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ konvergira ka nekom elementu $x \in X$ i pri tome je

$$\|x\| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| \leq 3N\,\|y\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3N\,\|y\| \ .$$

Zbog konvergencije reda $\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k$ i neprekidnosti operatora A, imamo

$$Ax = \sum_{k\in\mathbb{N}} Ax_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} y_k = y \ ,$$

odakle je onda $x = A^{-1}y$. Sada vrijedi

$$\left\|A^{-1}y\right\| = \|x\| \leq 3N\,\|y\| \ ,$$

za proizvoljno $y \in Y$, a ovo znači da je A^{-1} ograničen operator. ♣

Stav o inverznom operatoru se uobičajeno iskazuje kao posljedica mnogo poznatije teoreme o otvorenom preslikavanju.

Teorem 3.2.6. ***(Princip otvorenog preslikavanja)***
Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je A ograničen linearan operator koji slika X na Y. Tada je A otvoreno preslikavanje, tj. slika otvorenog skupa u X je otvoren skup u Y.

3.3 O još dva principa

Medju bitna tvrdjenja funkcionalne analize spadaju i sljedeća dva. To su princip konvergencije i princip uniformne ograničenosti.

Teorem 3.3.1. ***(Princip uniformne ograničenosti)***
Neka je $\mathcal{T}$ proizvoljna familija ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa Banachovog prostora X u prostor Y. Neka za svako $x \in X$, postoji konstanta $M(x) > 0$ (koja zavisi eventualno samo od x), tako da vrijedi

$$(\forall T \in \mathcal{T})\ \ \|Tx\| \leq M(x) \ .$$

Tada postoji konstanta M, za koju vrijedi

$$(\forall T \in \mathcal{T})\ \ \|T\| \leq M \ .$$

Dokaz : Pretpostavimo da familija $\mathcal{T}$ nije ograničena niti na jednoj kugli u X. Posmatrajmo kuglu $K_0 = K(0, \frac{1}{2})$ i kako $\mathcal{T}$ nije ograničena ni na njoj, postoji $T = T_1 \in \mathcal{T}$ i $x_1 \in K(0, \frac{1}{2})$, tako da

je $\|T_1x_1\| > 1$.
Neka je sada r_1 proizvoljan, takav da vrijedi

$$0 < r_1 < \min\left\{\frac{\|T_1x_1\| - 1}{\|T_1\|}, \frac{1}{2}\right\} .$$

Označimo sa $K_1 = K(x_1, r_1)$. Za proizvoljan $x \in K_1$ je $\|x - x_1\| \leq r_1$ i pri tome je

$$\begin{aligned}
\|T_1x\| &= \|T_1x_1 - T_1(x - x_1)\| \\
&\geq \|T_1x_1\| - \|T_1(x - x_1)\| \\
&\geq \|T_1x_1\| - \|T_1\| \, \|x - x_1\| \\
&\geq \|T_1x_1\| - \|T_1\| \, r_1 \\
&> 1 .
\end{aligned}$$

Dakle, za proizvoljno $x \in K_1$, vrijedi $\|T_1x\| > 1$.

Polazeći sada od kugle $K_1 = K(x_1, r_1)$, na isti način utvrdjujemo postojanje operatora $T_2 \in \mathcal{T}$ i $x_2 \in K_1$ te kugle $K_2 = K(x_2, r_2) \subset K_1$, takvih da je

$$(\forall x \in K_2) \;\; \|T_2x\| > 2 ,$$

pri čemu je $r_2 < \frac{1}{2^2}$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do niza operatora $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ i niza kugli $K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ čiji su poluprečnici $r_1, r_2, ..., r_n, ...$, takvi da je $r_n < \frac{1}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$), i pri tome je

$$\|T_nx\| > n \; , \; x \in K_n \; .$$

Na osnovu teorema o karakterizaciji kompletnosti imamo da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x_0\} \;\; , \quad \text{za neko} \;\; x_0 \in X \; .$$

Šta više, $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$). Pri tome je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, $\|T_nx_0\| > n$, a to je nemoguće jer smo pretpostavili da za svako $x \in X$, vrijedi

$$\|Tx\| \leq M(x) \; .$$

Dakle, postoji kugla $K(x', r')$, takva da je

$$\|Tx\| \leq M' \; ,$$

Za sve $x \in K(x', r')$ i za sve $T \in \mathcal{T}$.

Neka je sada $x \in K(0, r')$ proizvoljan. Tada $x + x' \in K(x', r')$, pa za svako $T \in \mathcal{T}$ imamo

$$\|Tx\| = \|-Tx' + T(x + x')\| \le \|Tx'\| + \|T(x + x')\| \le M(x') + M' \ .$$

Stavimo li $M'' = M(x') + M'$, vrijedi

$$(\forall x \in K(0, r')) \ \ \|Tx\| \le M'' \ ,$$

za svako $T \in \mathcal{T}$.
Neka je sada $x \in X$ proizvoljan ($x \neq 0$). Tada je $\frac{x}{\|x\|} r' \in K(0, r')$, pa vrijedi

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|} r' \right) \right\| \le M'' \ ,$$

tj.

$$\|Tx\| \le \frac{M''}{r'} \|x\| \ .$$

Stavimo $M = \frac{M''}{r'}$, dakle vrijedi

$$(\forall T \in \mathcal{T})(\forall x \in X) \ \ \|Tx\| \le M \|x\| \ ,$$

a ovo upravo znači

$$(\forall T \in \mathcal{T}) \ \ \|T\| \le M \ .$$

♣

Dokazani teorem smo mogli iskazati i u obratnoj formi, tj

Teorem 3.3.2. *Ako niz $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ nije ograničen, tada postoji $x^* \in X$, takav da je*

$$\limsup_{n \to \infty} \|T_n x^*\| = +\infty \ .$$

Ovako iskazan teorem naziva se *princip rezonancije*.

Teorem 3.3.3. ***(Princip konvergencije)***
Neka je $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa prostora X u Banachov prostor Y. Ako su zadovoljeni uslovi

1. $(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ \|T_n\| \le M$.

2. *Postoji $\lim_{n \to \infty} T_n x$, za sve x iz skupa koji je gust u nekoj kugli prostora X.*

Tada postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$*, za sve* $x \in X$ ***i sa***

$$T_0 x = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

je definisan ograničen linearan operator T_0*, za koga vrijedi*

$$\|T_0\| \leq \liminf \|T_n\| \ .$$

Dokaz : Za konstantu M u prvom uslovu možemo smatrati da je pozitivna i neka je S skup koji je gust u nekoj kugli $B(x_0, r)$, tako da postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$, za sve $x \in S$.

Neka su sada $x \in K(x_0, r)$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Tada postoji $y \in S$, takav da je $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Osim toga, zbog konvergencije niza $(T_n x)$, za svako $x \in S$, postoji $N \in \mathbb{N}$, tako da za proizvoljne $n, m \geq N$, vrijedi

$$\|T_n y - T_m y\| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Na osnovu svega ovoga, za $n, m \geq N$, sada imamo

$$\begin{aligned}
\|T_n x - T_m x\| &= \|(T_n x - T_n y) + (T_n y - T_m y) + (T_m y - T_m x)\| \\
&\leq \|T_n(x - y)\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m(x - y)\| \\
&\leq \|T_n\| \, \|x - y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m\| \, \|x - y\| \\
&\leq 2M \, \|x - y\| + \|T_n y - T_m y\| \\
&< 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Ovo znači da je za proizvoljno $x \in K(x_0, r)$, niz $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako se on nalazi u Banachovom prostoru Y, on je i konvergentan, tj. postoji

$$\lim_{n\to\infty} T_n x \ , \ x \in K(x_0, r) \ .$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan ($x \neq 0$). Tada je

$$x_0 + \frac{r}{\|x\|} x \in K(x_0, r) \ ,$$

pa postoji

$$\lim_{n\to\infty} T_n \left(x_0 + \frac{r}{\|x\|} x \right) = \lim_{n\to\infty} \left(T_n x_0 + T_n \left(\frac{r}{\|x\|} x \right) \right) \ .$$

Zbog $x_0 \in K(x_0, r)$, postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x_0$, a to onda znači da mora postojati i

$$\lim_{n\to\infty} T_n \left(\frac{r}{\|x\|} x \right) \ ,$$

tj. postoji
$$\lim_{n\to\infty} T_n x \ .$$
Dakle, za svako $x \in X$, postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Definišimo onda
$$x \in X \ , \ T_0 x = \lim_{n\to\infty} T_n x \ .$$
Za proizvoljne $x', x'' \in X$ i za proizvoljne $\alpha, \beta \in \Phi$, vrijedi
$$\begin{aligned} T_0(\alpha x' + \beta x'') &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x' + \beta x'') \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n x' + \beta T_n x'') \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x' + \beta \lim_{n\to\infty} T_n x'' \\ &= \alpha T_0 x' + \beta T_0 x'' \ , \end{aligned}$$
te je T_0 linearan operator.
Za proizvoljno $x \in X$ je
$$\begin{aligned} \|T_0 x\| &= \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &= \liminf_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} (\|T_n\| \, \|x\|) \\ &= (\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|) \, \|x\| \ . \end{aligned}$$
Iz posljednjeg vidimo da je T_0 ograničen operator, i da pri tome vrijedi
$$\|T_0\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \ .$$
♣

Vidimo da je bitna pretpostavka u obje teoreme kompletnost prostora, i to u principu uniformne ograničenosti zahtjevamo da je domen X Banachov prostor, a u principu konvergencije zahtjevamo da je kodomen Y Banachov prostor. Ova dva stava kada ih objedinimo, daju poznati *Banach-Steinhausov* stav.

Teorem 3.3.4. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz ograničenih linearnih operatora koji djeluju sa X u Y. Da bi niz $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirao ka Ax za svako $x \in X$, gdje je $A : X \to Y$ ograničen linearan operator, potrebno je i dovoljno da su zadovoljeni uslovi*

1. *Niz $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen.*
2. *Postoji $\lim_{n\to\infty} T_n x$ na nekom svuda gustom skupu elemenata.*

3.4 Zatvoreni operator

Neka su X i Y Banachovi prostori. Sa $X \times Y$ označavamo Descartesov produkt skupova X i Y. Ako na $X \times Y$ uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju na sljedeći način,

- $(\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y)\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- $(\forall (x, y) \in X \times Y)(\forall \lambda \in \Phi)\ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$,

lahko se provjerava da $X \times Y$ dobija strukturu vektorskog prostora.

Na $X \times Y$ možemo definisati i normu na sljedeći način

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \ , \ (x, y) \in X \times Y \ ,$$

u odnosu na koju je $X \times Y$ Banachov prostor (pokazati ove dvije tvrdnje!).

Definicija 3.4.1. *Neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Skup*

$$G_A = \{(x, Ax) |\ x \in D_A\} \subseteq X \times Y \ ,$$

nazivamo grafom operatora A.

Definicija 3.4.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Kažemo da je A zatvoren operator ako i samo ako je G_A zatvoren skup u $X \times Y$.*

Teorem 3.4.1. *Linearan operator A koji slika Banachov prostor X u Banachov prostor Y je zatvoren ako i samo ako iz*

1. *$x_n \to x_0$ ($n \to \infty$), $(x_n) \subset D_A$ i*
2. *$Ax_n \to y_0$,*

slijedi $x_0 \in D_A$ i $Ax_0 = y_0$.

Dokaz : Dokaz ostavljen čitaocu za vježbu! ♣

Definicija 3.4.3. *Neka su $A, B : X \to Y$ linearni operatori. Za operator B kažemo da je proširenje operatora A, u oznaci $A \subset B$, ako i samo ako je $G_A \subset G_B$.*

Za linearan operator A kažemo da dopušta zatvorenje ako postoji zatvoren operator A_1, takav da je $A \subset A_1$. Operator A_1 nazivamo zatvorenjem operatora A. Ako za proizvoljno drugo zatvorenje A_2 operatora A, vrijedi $A_1 \subset A_2$, za A_1 kažemo da je minimalno zatvorenje operatora A.

Teorem 3.4.2. *Da bi linearan operator $A : X \to Y$ dopuštao zatvorenje neophodno je i dovoljno da zatvorenje $\overline{G}_A$ grafika G_A ne sadrži elemente oblika $(0, y)$ za $y \neq 0$.*

Dokaz : Neka operator A dopušta zatvorenje i neka je A_1 njegovo proizvoljno zatvorenje. To znači da je $G_A \subset G_{A_1}$ i G_{A_1} je zatvoren skup. Zbog toga je onda $\overline{G}_A \subset \overline{G}_{A_1} = G_{A_1}$.
Neka je sada $(0, y) \in \overline{G}_A$. Tada je $(0, y) \in G_{A_1}$, te je $0 \in D_{A_1}$ i $A_1 0 = y$. Kako je A_1 linearan operator to mora vrijediti $A_1 0 = 0$, tj. $y = 0$, pa $\overline{G}_A$ ne sadrži elemente oblika $(0, y)$, gdje je $y \neq 0$.

Pretpostavimo sada da $\overline{G}_A$ ne sadrži elemente oblika $(0, y)$, $y \neq 0$. Označimo sa

$$D_{\overline{A}} = \left\{ x \in X | \ (\exists y \in Y) \ (x, y) \in \overline{G}_A \right\} \ .$$

Skup $D_{\overline{A}}$ je linearan vektorski prostor. Zaista, $\overline{G}_A$ je linearan jer je on zatvorenje linearnog prostora G_A. Neka su sada $x_1, x_2 \in D_{\overline{A}}$. Tada postoje $y_1, y_2 \in Y$, takvi da je $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{G}_A$. Zbog linearnosti $\overline{G}_A$, tada je

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \overline{G}_A \ ,$$

a ovo opet znači da je $x_1 + x_2 \in D_{\overline{A}}$.
Neka je $x \in D_{\overline{A}}$ i $\lambda \in \Phi$. Tada postoji $y \in Y$, takav da je $(x, y) \in \overline{G}_A$, te opet imamo da je

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in \overline{G}_A \ .$$

Dakle, $\lambda x \in D_{\overline{A}}$.

Sada tvrdimo da za svako $x \in D_{\overline{A}}$ postoji tačno jedno $y \in Y$, tako da je $(x, y) \in \overline{G}_A$. Zaista, da bar jedan y postoji, imamo na osnovu definicije skupa $D_{\overline{A}}$. Pretpostavimo da postoje dva, tj. $(x, y), (x, y') \in \overline{G}_A$. Zbog linearnosti skupa $\overline{G}_A$, vrijedi

$$(x, y) - (x, y') = (0, y - y') \in \overline{G}_A \ ,$$

a zbog polazne pretpostavke zaključujemo da mora biti $y = y'$.

Za proizvoljan $x \in D_{\overline{A}}$, označimo sa $y = \overline{A}x$ onaj postojeći jedinstveni $y \in Y$. Na taj način smo definisali novo preslikavanje $\overline{A}$, za koga je domen očigledno, upravo skup $D_{\overline{A}}$. Lahko se pokazuje da je $\overline{A}$ linearan operator, a takodje i to da je graf $G_{\overline{A}}$ operatora $\overline{A}$, upravo $\overline{G}_A$. Onda je $G_{\overline{A}}$ zatvoren skup, a time je $\overline{A}$ zatvoren operator. Kako je očigledno $G_A \subset \overline{G}_A = G_{\overline{A}}$, jasno je da je $\overline{A}$ zatvorenje operatora A.

Šta više, neka je A_1 bilo koje zatvorenje operatora A, tj. $G_A \subset G_{A_1}$, onda je

$$G_{\overline{A}} = \overline{G}_A \subset \overline{G}_{A_1} = G_{A_1} \ ,$$

a ovo znači da je $\overline{A} \subset A_1$, odnosno $\overline{A}$ je minimalno zatvorenje operatora A. ♣

Gornji teorem se može iskazati i u sljedećoj formi

Teorem 3.4.3. *Da bi linearan operator* $A : X \to Y$ *dopuštao zatvorenje potrebno je i dovoljno da ako vrijedi* $x_n \to 0$ *(*$n \to \infty$, $x_n \in D_A$*) i* $Ax_n \to y$ *(*$n \to \infty$*), onda mora biti* $y = 0$*.*

Ovaj oblik teorema nam daje način kako ćemo izvršiti zatvaranje operatora ako je to moguće. Naime, ako je gornji uslov ispunjen, onda definišemo operator $\overline{A}$ tako da mu je domen skup $D_{\overline{A}}$, svih $x \in X$ za koje postoji niz $(x_n) \subset D_A$, tako da vrijedi

$$x_n \to x \ , \ Ax_n \to y \ , \ (n \to \infty) \ ,$$

gdje je $y \in Y$, takav da je

$$\overline{A}x = y = \lim_{n\to\infty} Ax_n \ .$$

Naravno, ostaje da vidimo kakva je veza izmedju neprekidnosti i zatvorenosti operatora. U dosadašnjim izlaganjima uglavnom smo posmatrali neprekidne operatore. Medjutim, i najjednostavniji primjeri (u primjenama česti) operatora nisu neprekidni.

Primjer 3.1. Neka je $M \subset l$, skup svih nizova iz l koji imaju samo konačno mnogo koordinata različitih od nula i neka je $A : M \to l$, zadat sa

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in M \ , \ Ax = (0, x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \ .$$

A je linearan operator za koga je za proizvoljno $x \in M$

$$\|Ax\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|x\| \ ,$$

tj. vrijedi $\|A\| \leq 1$. Dakle, A je neprekidan operator.
Medjutim, posmatramo li niz $(x_n) \subset M$, gdje je $x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, 0, ...)$ ($n \in \mathbb{N}$), jasno je da $x_n \to x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...)$ ($n \to \infty$), ali $x_0 \notin M$, pa A nije zatvoren operator. ♢

Gornji primjer nam pokazuje da neprekidnost linearnog operatora ne povlači njegovu zatvorenost. Zato iskažimo sljedeću tvrdnju, čiji dokaz je ostavljen čitaocu za vježbu.

Teorem 3.4.4. *Da bi neprekidan linearan operator bio zatvoren, potrebno je i dovoljno da je on definisan na potprostoru Banachovog prostora.*

I sljedeća jednostavna tvrdnja ostavljena je čitaocu za vježbu.

Teorem 3.4.5. *Ako je linearan operator A zatvoren i ako postoji inverzni operator A^{-1}, tada je i A^{-1} zatvoren operator.*

Sljedeći primjer nam daje preslikavanje koje jeste zatvoreno ali nije neprekidno.

Primjer 3.2. Posmatrajmo operator $\frac{d}{dx} : C^1[0,1] \to C[0,1]$, zadat sa

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \ .$$

Za posmatrani operator diferenciranja se lahko pokazuje da je on linearan operator. Medjutim, ako posmatramo niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1[0,1]$, gdje je $f_n(x) = x^n$, imamo

$$\left\| \frac{d}{dx} f_n(x) \right\| = \left\| n x^{n-1} \right\|_{C[0,1]} = n \ , \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Iz ovoga je očigledno da operator diferenciranja nije ograničen operator.

Medjutim, ako je $g_n(x) \subset C^1[0,1]$ proizvoljan niz, takav da

$$g_n \to g_0 \ i \ \frac{dg_n}{dx} \to \phi \ , \ n \to \infty \ ,$$

druga od ovih pretpostavki znači da niz izvoda (g_n') uniformno konvergira ka funkciji ϕ (po metrici prostora $C[0,1]$). Sada za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo

$$\begin{aligned} \int_0^x \phi(t)dt &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} \frac{dg_n}{dt}(t)dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{dg_n}{dt}(t)dt \quad \text{(zbog uniformne konvergencije)} \\ &= \lim_{n\to\infty} (g_n(x) - g_n(0)) \\ &= g_0(x) - g_0(0) \ . \end{aligned}$$

Dakle,

$$g_0(x) = g_0(0) + \int_0^x \phi(t)dt \ , \ x \in [0,1] \ .$$

Funkcija $\phi \in C[0,1]$ jer je ona kao granična vrijednost uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija i sama neprekidna. To nam onda gornja jednakost daje da je $g_0 \in C^1[0,1]$, a osim toga jasno je da vrijedi $\frac{dg_0}{dx} = \phi$ na $[0,1]$. Ostaje nam pozvati se na Teorem 3.4.1 i konstatovati zatvorenost operatora. $\diamondsuit$

Sljedeći teorem nam govori pod kojim uslovima će zatvoren operator biti ograničen i poznat je pod nazivom Banachov teorem o zatvorenom grafiku.

Teorem 3.4.6. *Neka je A zatvoren linearan operator koji preslikava Banachov prostor X u Banachov prostor Y. Ako je skup D_A skup druge kategorije u X, onda vrijedi $D_A = X$ i A je neprekidan operator.*

Dokaz : Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo skupove

$$X_n = \{x \in D_A | \ \|Ax\| \leq n\|x\|\} \ .$$

Jasno je da vrijedi

$$D_A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \ .$$

Kako je po pretpostavci D_A skup druge kategorije u X, postoji X_{n_0} koji je gust u nekoj kugli $K(x_0, r)$ ($r > 0$).
Neka je sada $K(x_1, r_1)$, takva da je $K(x_1, r_1) \subset K(x_0, r)$, pri čemu je $x_1 \in X_{n_0}$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan (bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $\varepsilon < \frac{r_1}{2}$). Ako je $y \in X$, takav da je $\|y\| = r_1$, tada je $y + x_1 \in K(x_1, r_1)$. Kako je X_{n_0} gust u $K(x_1, r_1)$, postoji $z \in X_{n_0}$, takav da je $\|x_1 + y - z\| < \varepsilon$. S druge strane imamo

$$\begin{aligned}
\|z\| &= \|(z - x_1 - y) + (x_1 + y)\| \\
&\leq \|z - x_1 - y\| + \|x_1 + y\| \\
&\leq \varepsilon + \|x_1\| + \|y\| \\
&\leq \frac{r_1}{2} + \|x_1\| + r_1 \\
&< 2r_1 + \|x_1\| \ .
\end{aligned}$$

Takodje vrijedi

$$\begin{aligned}
\|z - x_1\| &= \|(z - x_1 - y) + y\| \\
&\geq \|y\| - \|z - x_1 - y\| \\
&> r_1 - \varepsilon \geq \frac{r_1}{2} \ .
\end{aligned}$$

Kako su $x_1, z \in X_{n_0} \subset D_A$, tada i $z - x_1 \in D_A$, pa vrijedi

$$\|A(z - x_1)\| \leq \|Ax_1\| + \|Az\| \leq n_0 \|x_1\| + n_0 \|z\| = n_0(\|x_1\| + \|z\|) \ .$$

Iz svega ovoga zaključujemo

$$\begin{aligned}
\|A(z - x_1)\| &\leq n_0(\|x_1\| + \|z\|) \\
&\leq 2n_0(r_1 + \|x_1\|) \\
&= \frac{2n_0(r_1 + \|x_1\|)}{\frac{r_1}{2}} \frac{r_1}{2} \\
&\leq \frac{4n_0(r_1 + \|x_1\|)}{r_1} \|z - x_1\| \ .
\end{aligned}$$

Označimo sa n_1 prvi prirodan broj koji nije manji od $\frac{4n_0(r+\|x_1\|)}{r_1}$. Posljednju nejednakost onda zapisujemo sa

$$\|A(z - x_1)\| \leq n_1 \|z - x_1\| \ ,$$

a ovo znači da $z - x_1 \in X_{n_1}$. Dakle, pokazali smo da za svako $y \in X$, $\|y\| = r_1$, postoji element iz X_{n_1} (to je upravo element $z - x_1$), koji proizvoljno dobro aproksimira element y.
Ako je sada $y \in K(0, r_1)$, tj. neka je $\|y\| \leq r_1$, onda za element $y_1 = \frac{r_1}{\|y\|} y$, vrijedi $\|y_1\| = r_1$, pa prema dokazanom, postoji $z_1 \in X_{n_1}$, takav da je za proizvoljno $\varepsilon > 0$

$$\|y_1 - z_1\| < \varepsilon \ .$$

Ovo onda znači

$$\left\| y - \frac{\|y\|}{r_1} z_1 \right\| < \frac{\|y\|}{r_1} \varepsilon \leq \varepsilon \qquad (\text{jer } \ \frac{\|y\|}{r_1} \leq 1) \ ,$$

a zbog homogenosti skupova X_n (tj. ako $x \in X_n$, onda i $\lambda x \in X_n$, za proizvoljno $\lambda \in \Phi$) onda imamo da je za $z_1 \in X_{n_1}$, element $z = \frac{\|y\|}{r_1} z_1 \in X_{n_1}$, pa zaključujemo da proizvoljan $y \in K(0, r_1)$ možemo proizvoljno dobro aproksimirati elementom $z \in X_{n_1}$ odnosno, X_{n_1} je gust u kugli $K(0, r_1)$.

Pokažimo sada da je $K(0, r_1) \subset D_A$. Zaista, neka je $x \in K(0, r_1)$ proizvoljan. Kako je X_{n_1} gust u $K(0, r_1)$, postoji $y_1 \in X_{n_1}$, takav da vrijedi

$$\|x - y_1\| < \frac{r_1}{2} \ .$$

Ovo znači da je $x-y_1 \in K(0,r_1)$, pa opet postoji $y_2 \in X_{n_1}$, takav da je

$$\|x-y_1-y_2\| < \frac{r_1}{2^2} \ .$$

Ako ovaj postupak produžimo, dobijamo niz $(y_k) \subset X_{n_1}$ za koga je

$$\|x-(y_1+y_2+\cdots+y_k)\| < \frac{r_1}{2^k} \ , \ k \in \mathbb{N} \ .$$

Označimo sa $z_k = y_1+y_2+\cdots+y_k$, $k \in \mathbb{N}$. Kako $y_i \in X_{n_1} \subset D_A$ ($i \in \mathbb{N}$), tada i $z_k \in D_A$, a osim toga vrijedi

$$z_k \to x \ , \ k \to \infty \ .$$

Takodje imamo

$$\begin{aligned} \|y_k\| &= \|(y_k+y_{k-1}+\cdots+y_1-x)+(x-y_1+y_2+\cdots+y_{k-1})\| \\ &\leq \frac{r_1}{2^k}+\frac{r_1}{2^{k-1}} \\ &< \frac{r_1}{2^{k-2}} \ . \end{aligned}$$

Neka su sada $m,n \in \mathbb{N}, \ n > m$ proizvoljni. Tada imamo

$$\begin{aligned} \|Az_n - Az_m\| &= \|A(z_n-z_m)\| \\ &= \|A(y_n+y_{n-1}+\cdots+y_{m+1})\| \\ &\leq \|Ay_n\|+\|Ay_{n-1}\|+\cdots+\|Ay_{m+1}\| \\ &\leq n_1(\|y_n\|+\|y_{n-1}\|+\cdots+\|y_{m+1}\|) \\ &< n_1\left(\frac{r_1}{2^{n-2}}+\frac{r_1}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{r_1}{2^{m-1}}\right) \\ &= \frac{r_1 n_1}{2^{m-1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-m-1}}\right) \\ &< \frac{r_1 n_1}{2^{m-1}} \ . \end{aligned}$$

Iz gornjeg zaključujemo da vrijedi

$$\|Az_n - Az_m\| \to 0 \ , \ n,m \to \infty \ ,$$

a ovo znači da je $(Az_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u Y i zbog potpunosti prostora Y, on je i konvergentan. Neka je granična vrijednost tog niza element y. Tada imamo za niz $(z_k) \subset D_A$

$$z_k \to x \ , \ k \to \infty$$

$$Az_k \to y \ , \ k \to \infty \ ,$$

pa zbog zatvorenosti operatora zaključujemo da $x \in D_A$ i $Ax = y$, tj. pokazali smo da je $K(0, r_1) \subset D_A$.

Opet na osnovu homogenosti skupa imamo da je za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, skup $nK(0, r_1) \subset D_A$, a kako je

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nK(0, r_1) \ ,$$

imamo da je $X \subseteq D_A$, tj. mora vrijediti $X = D_A$.

Ostaje nam još pokazati ograničenost operatora A.
Vidjeli smo da za proizvoljno $x \in K(0, r_1)$, postoji niz (z_k), $z_k = y_1 + y_2 + \cdots y_k$ ($y_i \in X_{n_1}$, $i \in \mathbb{N}$, $\|y_k\| < \frac{r_1}{2^{k-2}}$), koji konvergira ka x i za koga je

$$Ax = \lim_{n \to \infty} Az_n \ .$$

Odavde je $\|Ax\| \leq \lim_{n \to \infty} \|Az_n\|$, i pri tome je

$$\|Az_n\| \leq n_1(\|y_1\| + \|y_2\| + \cdots + \|y_n\|) < 4r_1 n_1 \ .$$

Neka je sada $x \in X$ proizvoljan. Tada $\frac{r_1}{\|x\|} x \in K(0, r_1)$, pa je na osnovu pokazanog zadovoljeno

$$\left\| A\left(\frac{r_1}{\|x\|} x\right) \right\| < 4n_1 r_1 \ ,$$

tj. vrijedi

$$\|Ax\| \leq 4n_1 \|x\| \ .$$

Ovo znači da je operator A ograničen, a time je teorem dokazan. ♣

Sljedeća tvrdnja je direktna posljedica gornje teoreme jer je X kao Banachov prostor, skup druge kategorije u sebi.

Posljedica 3.4.7. *Ako je A zatvoren linearan operator definisan na cijelom Banachovom prostoru X, onda je A neprekidan operator.*

Sljedeću tvrdnju nećemo dokazivati ali se preporučuje čitaocu da je analizom uporedi sa ranije spomenutom teoremom o otvorenom preslikavanju jer se u literaturi često i ovaj teorem naziva "teorem o otvorenom preslikavanju".

Teorem 3.4.8. *Neka je A zatvoren linearan operator koji slika Banachov prostor X u Banachov prostor Y. Neka je R_A skup druge kategorije u Y, onda vrijedi*

1. $R_A = Y$.
2. *Postoji konstanta* $m > 0$*, takva da za svako* $y \in Y$*, postoji* $x \in X$*, takav da je* $Ax = y$ *i* $\|y\| \geq m\|x\|$.
3. *Ako* A^{-1} *postoji, onda je i on ograničen operator.*

Glava 4

Linearni funkcionali

Posmatrajući operatore, mi smo ustvari posmatrali preslikavanja sa proizvoljnog protora X u proizvoljan prostor Y. Ukoliko prostor Y nije proizvoljan, preciznije, ukoliko je $Y = \mathbb{R}$ ili $Y = \mathbb{C}$, onda takvim operatorima dajemo drugačiji naziv.

Neka je X proizvoljan linearan prostor. Preslikavanje $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ nazivamo funkcional. Dakle, fukcionali su specijalni operatori, pa sve iskazano o operatorima vrijedi i za funkcionale. Tako, za funkcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ kažemo da je aditivan, ako za proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) ,$$

a ako i za proizvoljan $\lambda \in \Phi$ vrijedi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) ,$$

kažemo da je funkcional homogen. Za homogen i aditivan funkcional jednostavno kažemo da je linearan funkcional.

I normu funkcionala definišemo kao normu operatora, stim da normu u kodomenu zamjenjujemo sa modulom, tj.

$$||f|| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x|| \leq 1} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |f(x)| .$$

Neki primjeri funkcionala su:

Neka je $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Tada je sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ , \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) ,$$

definisan linearan funkcional $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Posmatramo li prostor $C[a, b]$, tada je sa

$$f(x) = \int_a^b x(t)dt \ ,$$

definisan linearan funkcional $f : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Za fiksirano $t_0 \in [a, b]$, sa

$$g(x) = x(t_0)$$

je takodje definisan linearan funkcional na $C[a, b]$.

Na prostoru l_p ($1 \leq p \leq +\infty$) primjer linearnog funkcionala je

$$f(x) = x_k \ , \ x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...) \ .$$

Skup svih linearnih neprekidnih funkcionala, definisanih na normiranom linearnom vektorskom prostoru X, označavamo sa X^*. Dake, saglasno odgovarajućem skupu za operatore imamo $X^* = \mathcal{L}(X, \Phi)$. Na osnovu Teorema 3.1.6, prostor X^* je Banachov prostor jer je Φ takav, i nazivamo ga *dualni*, *adjungovani* ili *konjugovani* prostor prostora X.

4.1 Geometrijski smisao linearnih funkcionala

Neka je $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ proizvoljan linearan funkcional na linearnom prostoru X. Posmatrajmo sve elemenata $x \in X$ koji zadovoljavaju

$$f(x) = 0 \ .$$

Skup svih ovakvih $x \in X$ nazivamo jezgro funkcionala f i označavamo ga sa

$$Ker(f) = \{x \in X | \ f(x) = 0\} \ .$$

Jezgro funkcionala je vektorski potprostor prostora X. Zaista, za $x, y \in Ker(f)$ i za proizvoljne $\lambda, \mu \in \Phi$ imamo

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0 \ .$$

Medjutim, jezgro funkcionala nemora biti potprostor prostora X, tj. on nije obavezno zatvoren skup. Šta više, vrijedi

Teorem 4.1.1. *Neka je X normiran prostor i f linearan funkcional na X. f je ograničen ako i samo ako je $Ker(f)$ zatvoren skup.*

Dokaz : Neka je f ograničen, dakle neprekidan, funkcional i neka je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Ker(f)$, takav da $x_n \to x$ ($n \to \infty$). Tada vrijedi

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \ ,$$

tj. $x \in Ker(f)$.

Obratno, neka je $Ker(f)$ zatvoren skup. Ako je $Ker(f) = X$, to znači da je f funkcional identički jednak 0, a kao takav je i ograničen. Pretpostavimo zato da je $Ker(f) \neq X$, tj. postoji $x_0 \in X \setminus Ker(f)$. Zbog zatvorenosti jezgra, postoji $r > 0$, takav da $B(x_0, r) \cap Ker(f) = \emptyset$. Ne umanjujući opštost, neka je $f(x_0) = 1$ (inače bi umjesto x_0 posmatrali $\frac{x_0}{f(x_0)}$). Neka je sada $x \in X$ proizvoljan, takav da $x \notin Ker(f)$. Kako je $f(x) \neq 0$, onda je

$$-\frac{x}{f(x)} + x_0 \in Ker(f) \ ,$$

a to opet znači da

$$-\frac{x}{f(x)} + x_0 \notin B(x_0, r) \ .$$

Ova činjenica znači da je

$$\left|\left|\left(-\frac{x}{f(x)} + x_0\right) - x_0\right|\right| \geq r \ ,$$

tj.

$$\frac{||x||}{|f(x)|} \geq r \ .$$

Odavde sada imamo da vrijedi

$$|f(x)| \leq \frac{1}{r}||x|| \ ,$$

za svako $x \notin Ker(f)$, a kako ova nejednakost vrijedi trivijalno i za elemente jezgra, zaključujemo da je f ograničen funkcional. ♣

Posljedica 4.1.2. *Neka je f linearan funkcional na normiranom prostoru X. f je neograničen funkcional ako i samo ako $Ker(f)$ je pravi podskup od X i svuda gust u X.*

Lema 4.1.3. *Neka je f proizvoljan netrivijalan linearan funkcional na linearnom vektorskom prostoru X. Kodimenzija potprostora $Ker(f)$ jednaka je 1.*

Dokaz : Neka je $x_0 \in X$, takav da $x_0 \notin Ker(f)$, tj. $f(x_0) \neq 0$ (takav postoji jer je f netrivijalan). Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $f(x_0) = 1$ (u suprotnom bi posmatrali element $\frac{x_0}{f(x_0)}$). Za proizvoljan $x \in X$, označimo sa

$$y = x - f(x)x_0 \ .$$

Kako je $f(y) = f(x - f(x)x_0) = f(x) - f(x)f(x_0) = 0$, jasno $y \in Ker(f)$. Dakle, za proizvoljan $x \in X$ imamo

$$x = \alpha x_0 + y \ , \text{ gdje je } y \in Ker(f) \ .$$

Tvrdimo sada da je gornja reprezentacija elementa x jedinistvena. Zaista, ako bi bilo

$$x = \alpha_1 x_0 + y_1 \ \text{ i } \ x = \alpha_2 x_0 + y_2 \ , \ y_1, y_2 \in Ker(f) \ ,$$

oduzimanjem ove dvije jednakosti bi dobili

$$(\alpha_1 - \alpha_2)x_0 = y_2 - y_1 \ .$$

Ako je sada $\alpha_1 = \alpha_2$, moralo bi biti i $y_1 = y_2$. U suprotnom, ako bi bilo $\alpha_1 \neq \alpha_2$, tada bi onda imali

$$x_0 = \frac{y_2 - y_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \in Ker(f) \ ,$$

a to protivriječi izboru elementa x_0. Dakle, reprezentacija je jedinstvena.
Neka su sada $x_1, x_2 \in X$. Tada vrijedi

$$x_1 = f(x_1)x_0 + y_1 \ , \ y_1 \in Ker(f) \ ,$$

$$x_2 = f(x_2)x_0 + y_2 \ , \ y_2 \in Ker(f) \ .$$

Tada je

$$x_1 - x_2 = (f(x_1) - f(x_2))x_0 + (y_1 - y_2) \ .$$

Iz ovoga sada vidimo da će $x_1 - x_2 \in Ker(f)$ ako i samo ako je $f(x_1) - f(x_2) = 0$, tj. x_1 i x_2 pripadaju istoj klasi ekvivalencije količničkog prostora $X/Ker(f)$ ako i samo ako je $f(x_1) = f(x_2)$.

Označimo sa ξ_0 onu klasu ekvivalencije koja sadrži element x_0. Ako je sada ξ proizvoljna klasa ekvivalencije, ona je odredjena bilo kojim svojim predstavnikom, a na osnovu gornjeg, za predstavnika možemo izabrati upravo elemet αx_0. Ovo opet znači da vrijedi

$$\xi = \alpha \xi_0 \ ,$$

za proizvoljnu klasu ekvivalencije, a to ne znači ništa drugo nego da je dimenzija količničkog prostora $X/Ker(f)$ jednaka 1. ♣

Ukoliko dva funkcionala imaju ista jezgra, onda su oni proporcionalni. Zaista, neka za linearne funkcionale f i g vrijedi $Ker(f) = Ker(g)$. Neka je x_0 takav da je $f(x_0) = 1$. Tada na osnovu dokaza gornje leme imamo za proizvoljno x

$$x = f(x)x_0 + y \ , \ y \in Ker(f) = Ker(g) \ .$$

Djelujmo funkcionalom g na x, dobijamo

$$g(x) = f(x)g(x_0) + g(y) = f(x)g(x_0) \ .$$

Ako bi sada imali da je $g(x_0) = 0$, to bi značilo da je funkcional g identički jednak nuli, ali onda bi zbog jednakosti jezgara i funkcional f bio identički jednak nuli, što nije moguće zbog izbora elementa x_0. Dakle $g(x_0) \neq 0$, a to onda znači $\frac{g(x)}{f(x)} = g(x_0)$, za proizvoljno x.

Lema 4.1.4. *Neka je X linearan vektorski prostor i L njegov potprostor kodimenzije 1. Tada postoji linearan funkcional na X, takav da je $Ker(f) = L$.*

Dokaz : Kako je kodimenzija od L u X jednaka 1, to se svaki $x \in X$ može predstaviti na jedinstven način u obliku

$$x = \alpha x_0 + y \ ; \ \alpha \in \Phi \ , \ x_0 \in X \ , \ y \in L \ .$$

Definišimo sada funkcional $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, sa $f(x) = \alpha$. Jednostavno se sada pokazuje da vrijedi $Ker(f) = L$. ♣

Neka je L potprostor prostora X, kodimenzije 1. Tada L predstavlja hiperpovrš u prostoru X. Medjutim, svaka klasa ekvivalencije iz X/L takodje predstavlja hiperpovrš datog prostora i to "paralelnu" potprostoru L. Pri tome pod "paralelnošću" ovdje podrazumijevamo da se svaka od tih klasa može dobiti paralelnim pomjeranjem ili translacijom potprostora L za neki vektor $x_0 \in X$,

$$\xi \in X/L \ , \ \xi = L + x_0 = \{y |\ y = x + x_0 \ , \ x \in L\} \ .$$

Ako je $x_0 \in L$, tada je $\xi = L$, u suprotnom, jasno je da ako $x_0 \notin L$, da je $\xi \neq L$.

Lema 4.1.5. *Neka je f proizvoljan netrivijalan linearan funkcional na X. Tada je skup*

$$H = \{x \in X |\ f(x) = 1\} \ ,$$

hiperpovrš u prostoru X, šta više, paralelna je potprostoru $Ker(f)$.

Dokaz : Kao što smo vidjeli, $Ker(f)$ zaista jeste potprostor od X i pri tome mu je kodimenzija 1, te je i hiperpovrš. Neka je sada $y \in H$ proizvoljan, tj. $f(y) = 1$. Kako se svaki vektor $x \in X$ može predstaviti na jedinstven način sa

$$x = \alpha x_0 + y' \ , \ \alpha \in \Phi \ , \ y \in Ker(f) \ ,$$

(za neko $x_0 \in X$) to isto će vrijediti i za element y, tj. postoje jedinstveni $\alpha' \in \Phi$ i $y' \in Ker(f)$, takvi da je $y = \alpha' x_0 + y'$. Kako je

$$f(y) = \alpha' f(x_0) + f(y') = \alpha' f(x_0) = 1 \ ,$$

zaključujemo da mora biti

$$\alpha' = \frac{1}{f(x_0)} \ ,$$

a to daje da se proizvoljan vektor $y \in H$, može predstaviti u obliku

$$y = \frac{x_0}{f(x_0)} + y' \ , \ y' \in Ker(f) \ .$$

Ovo ne znači ništa drugo nego da je kodimenzija od H u X jednaka 1, tj. H je hiperpovrš, a osim toga iz posljednje jednakosti zaključujemo da vrijedi

$$H = Ker(f) + \frac{x_0}{f(x_0)} \ .$$

♣

Šta više, vrijedi i obrat ovog tvrdjenja.

Lema 4.1.6. *Neka je H proizvoljna hiperpovrš u prostoru X, paralelna potprostoru $L \subset X$. Tada postoji jedinstven linearan funkcional f na X, takav da je*

$$H = \{x \in X |\ f(x) = 1\} \ .$$

Dokaz : Neka je za neko $x_0 \in X$, $M = L + x_0$. Tada se svaki vektor $x \in X$ može na jednoznačan način predstaviti u obliku

$$x = \alpha x_0 + y \ , \ y \in L \ .$$

Stavljajući da je $f(x) = \alpha$, dobijamo traženi funkcional jer će u tom slučaju hiperpovrš biti odredjena sa $f(x) = 1$. Ako bi postojao i funkcional g na X, takav da je za $x \in H$, $g(x) = 1$, tada bi moralo biti $g(y) = 0$, za $y \in L$, a to bi zbog

$$g(\alpha x_0 + y) = \alpha = f(\alpha x_0 + y) \ ,$$

značilo poklapanje funkcionala. ♣

Sa ove dvije leme smo uspostavili obostrano jednoznačno pridruživanje izmedju svih hiperpovrši posmatranog prostora X i na njemu definisanih funkcionala, sa čime smo onda dobili i geometrijsku interpretaciju linearnih funkcionala

4.2 Hahn-Banachov teorem

U svakom Banachovom prostoru preslikavanje identički jednako nuli, predstavlja jedan ograničen linearan funkcional. Postavlja se pitanje, da li postoje i drugi, netrivijalni funkcionali na proizvoljnom Banachovom prostoru? Ako postoje, mogu li im se unaprijed pripisati, i u kojoj mjeri, izvjesne osobine? Specijalno, postoji li ograničen linearan funkcional jednak nuli na nekom pravom potprostoru Banachovog prostora, a da pri tome ne isčezava na čitavom prostoru? Na sva ova pitanja egzistencije, odgovor nam daje Hahn-Banachov teorem o produženju linearnog ograničenog funkcionala. Bez ovog teorema, današnja funkcionalna analiza bi bila sasvim drugačija. Prve rezultate vezane za ovaj teorem dali su Riesz i Helly na samom početku dvadesetog vijeka, a Hahn i Banach će ga 1920. godine postaviti i dokazati u današnjem obliku (za realan slučaj), neovisno jedan od drugog.

Po svojoj eleganciji i jačini, Hahn-Banachov teorem je omiljen u matematičkim krugovima. Neki od ”nadimaka” ovog teorema su ”Analitička forma aksioma izbora” i ”Krunski dragulj funkcionalne analize”. Neophodan je alat u funkcionalnoj analizi, ali i u drugim oblastima matematike, kao što su teorija upravljanja, konveksno programiranje, teorija igara, neophodan je u dokazu egzistencije Greenove funkcije, u formulaciji termodinamike i sl.

Teorem 4.2.1 (Hahn-Banachov teorem, realan slučaj). *Neka je X realan Banachov prostor i neka je L lineal u X. Neka je na L definisan ograničen linearan funkcional f. Tada postoji ograničen linearan funkcional f^*, definisan na cijelom X, takav da vrijedi*

- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = f(x)$ *i*
- $||f^*|| = ||f||$.

Dokaz : Neka je na L definisan ograničen linearan funkcional f. Slučaj $L = X$ je trivijalan, zato pretpostavimo da je L pravi potprostor od X. Tada postoji $x_0 \in X$, takav da $x_0 \notin L$. Označimo sa L_0 lineal generisan elementom x_0, tj.

$$L_0 = \{x \in X |\ x = \lambda x_0\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}\ .$$

Neka je sada $L_1 = L \oplus L_0$, koji je zbog konačne dimenzije lineala L_0, takodje potprostor od X. Pokažimo kao prvo da se naš funkcional može produžiti na L_1, bez promjene norme.

Zbog direktne sume, svaki se element $x \in L_1$ može na jedinstven način zapisati u obliku

$$x = l + \lambda x_0\ ,\ l \in L\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

(Za svako x, λ i l su jedinstveno odredjeni.)

Ne gubeći na opštosti, pretpostavimo da je $||f|| = 1$. Tada za proizvoljne $x, y \in L$ imamo

$$\begin{aligned} f(x-y) &\leq |f(x-y)| \\ &\leq ||f||||x-y|| = ||x-y|| = ||x - x_0 + x_0 - y|| \\ &\leq ||x - x_0|| + ||x_0 - y||\ . \end{aligned}$$

Zbog linearnosti funkcionala, tj. $f(x-y) = f(x) - f(y)$, iz gornjeg zaključujemo da vrijedi

$$f(x) - ||x - x_0|| \leq f(y) + ||x_0 - y||\ .$$

Odavde, uzimajući prvo supremum lijeve strane, a onda infimum desne, dobijamo da vrijedi

$$\sup \{f(x) - ||x - x_0||\ |\ x \in L\} \leq \inf \{f(y) + ||x_0 - y||\ |\ y \in L\}\ .$$

Zbog gustosti skupa $\mathbb{R}$, postoji $k \in \mathbb{R}$, takav da je

$$\sup \{f(x) - ||x - x_0||\ |\ x \in L\} \leq k \leq \inf \{f(y) + ||x_0 - y||\ |\ y \in L\}\ .$$

Definišimo sada funkcional $f_1 : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, na sljedeći način: za $x = l + \lambda x_0 \in L_1$, neka je po definiciji

$$f_1(x) = f(l) + \lambda \cdot k \ .$$

Za $x' = l' + \lambda' x_0$ i $x'' = l'' + \lambda'' x_0$ iz L_1 i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$\begin{aligned} f_1(\alpha x' + \beta x'') &= f_1((\alpha l' + \beta l'') + (\alpha\lambda' + \beta\lambda'')x_0) \\ &= f(\alpha l' + \beta l'') + (\alpha\lambda' + \beta\lambda'')k \\ &= \alpha f(l') + \beta f(l'') + \alpha\lambda' x_0 + \beta\lambda'' x_0 \\ &= \alpha f_1(x') + \beta f_1(x'') \ , \end{aligned}$$

dakle, f_1 je linearan funkcional. Osim toga, kako je $L \subset L_1$, to za $x \in L$ imamo da je $x = x + 0 \cdot x_0$, a time je

$$f_1(x) = f(x) + 0 \cdot k = f(x) \ ,$$

pa zaključujemo da se funkcionali f i f_1 poklapaju na L, tj. f_1 je produženje funkcionala f.

Ostaje nam još pokazati da je pri tom produženju očuvana norma. Neka je $x \in L_1$ proizvoljan. Tada je za jedinstvene $l \in L$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = l + \lambda x_0$, i pri tome je $f_1(x) = f(l) + \lambda k$. Neka je sada $\lambda > 0$. Zbog načina izbora broja k, vrijedi

$$f_1(x) = f(l) + \lambda k \leq f(l) + \lambda(f(y) + ||y - x_0||) = f(l) + f(\lambda y) + ||\lambda y - \lambda x_0|| \ ,$$

za proizvoljno $y \in L$. Odaberimo y tako da vrijedi $\lambda y = -l$. Tada imamo

$$f_1(x) \leq || - l - \lambda x_0|| = ||l + \lambda x_0|| = ||x|| \ . \tag{4.1}$$

S druge strane, ponovo zbog izbora broja k vrijedi

$$f_1(x) = f(l) + \lambda k \geq f(l) + \lambda(f(y) - ||y - x_0||) = f(l) + f(\lambda y) - ||\lambda y - \lambda x_0|| \ ,$$

za sve $y \in L$. Odaberimo opet da je $\lambda y = -l$, dobijamo

$$f_1(x) \geq -|| - l - \lambda x_0|| = -||l + \lambda x_0|| = -||x|| \ . \tag{4.2}$$

Iz (4.1) i (4.2) zaključujemo da vrijedi

$$|f_1(x)| \leq ||x|| \ , \text{ za sve } x \in L_1 \ .$$

Sve gornje je pokazano za slučaj ako je $\lambda > 0$. Ako je $\lambda < 0$, tada bi posmatrali $-x = l' + \lambda' x_0$, gdje je $\lambda' = -\lambda$, a $l' = -l$, te bi prema dokazanom imali

$$|f_1(x)| = |f_1(-x)| \leq || - x|| = ||x|| \ .$$

Ako je na kraju $\lambda = 0$, tada je $x \in L$, pa zbog poklapanja funkcionala vrijedi

$$|f_1(x)| = |f(x)| \leq ||f|| ||x|| = ||x|| \ .$$

Iz svega rečenog zaključujemo da za svako $x \in L_1$ vrijedi $|f_1(x)| \leq ||x||$, tj.

$$||f|| \leq 1 \ . \tag{4.3}$$

S druge strane opet, zbog definicije norme funkcionala i osobina supremuma imamo

$$||f_1|| = \sup_{x \in L_1 \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{||x||} \geq \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f_1(x)|}{||x||} = \sup_{x \in L \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = ||f|| = 1 \ ,$$

tj. vrijedi

$$||f_1|| \geq 1 \ . \tag{4.4}$$

Iz (4.3) i (4.4) zaključujemo da vrijedi

$$||f_1|| = 1 \ ,$$

te smo dobili produženje funkcionala bez promjene norme.

Posmatrajmo sada familiju $\mathcal{F}$, svih produženja funkcionala f bez promjene norme. Na osnovu gore pokazanog, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. U $\mathcal{F}$ uvedimo sljedeću relaciju, za $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$

$$f_1 \preceq f_2 \ \Leftrightarrow \ f_2 \text{ je produženje funkcionala } f_1.$$

Trivijalno se pokazuje da je sa uvedenom relacijom, $\mathcal{F}$ parcijalno uredjen skup. Pokažimo sada da su u $\mathcal{F}$ ispunjeni uslovi za primjenu Zornove leme.

Neka je $\mathcal{F}_0$ proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$ (svi elementi u $\mathcal{F}_0$ su medjusobno uporedivi uvedenom relacijom). Označimo sa

$$L' = \bigcup_{i \in I} L_i \ ,$$

gdje su L_i ($i \in I$) lineali na kojima su definisani funkcionali $f_i \in \mathcal{F}_0$ i koji predstavljaju proširenja lineala L. Kako je $\mathcal{F}_0$ lanac, to je za proizvoljne $f_i, f_j \in \mathcal{F}_0$ ili $f_i \preceq f_j$ ili $f_j \preceq f_i$, a to onda znači da za odgovarajuće lineale vrijedi ili $L_i \subseteq L_j$ ili $L_j \subseteq L_i$. Koristeći ovo, lahko dokazujemo da je L' lineal u X i da je $L \subseteq L'$, a takodje za svako $i \in I$ je $L_i \subseteq L'$.

Definišimo sada funkcional $f_0 : L' \longrightarrow \mathbb{R}$ na sljedeći način: za proizvoljno $x \in L'$, postoji $i \in I$, takav da je $x \in L_i$, i stavimo

$$f_0(x) = f_i(x) \ .$$

Neka je $x \in L'$ proizvoljan i neka je $i \in I$ onaj za koga je $x \in L_i$. Ako je L_j neki drugi lineal koji sadrži x, tada za odgovarajuće funkcionale vrijedi

$$f_i \preceq f_j \ \text{ ili } \ f_j \preceq f_i \ .$$

Neka je recimo $f_i \preceq f_j$. Ovo onda znači da je funkcional f_j proširenje funkcionala f_i, a onda se njihove vrijednosti poklapaju na L_i, tj.

$$f_0(x) = f_i(x) = f_j(x) \ ,$$

te vrijednost funkcionala f_0 ne ovisi o tome koji od funkcionala biramo nego samo o x, pa je f_0 dobro definisan funkcional.
Ako su $x, y \in L'$ proizvoljni, tada postoje L_i i L_j takvi da je $x \in L_i$ i $y \in L_j$, ali pri tome zbog uredjenosti lanca, još vrijedi npr. $L_i \subseteq L_j$. Dakle, $x, y \in L_j$, a kako je on lineal, to mamo

$$f_0(x+y) = f_j(x+y) = f_j(x) + f_j(y) = f_0(x) + f_0(y) \ .$$

Na sličan način se pokazuje da za proizvoljno $\lambda \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$f_0(\lambda x) = \lambda f(x) \ .$$

Dakle, f_0 je linearan funkcional.

Kako je za proizvoljan $f \in \mathcal{F}$, $||f|| = 1$, tada je za proizvoljno $x \in L'$

$$|f_0(x)| = |f_i(x)| \leq ||x|| \ ,$$

odnosno $||f_0|| \leq 1$. S druge strane imamo

$$||f_0|| = \sup_{x \in L' \setminus \{0\}} \frac{|f_0(x)|}{||x||} \geq \sup_{x \in L_i \setminus \{0\}} \frac{|f_0(x)|}{||x||} = \sup_{x \in L_i \setminus \{0\}} \frac{|f_i(x)|}{||x||} = ||f_i|| \ ,$$

za proizvoljno $i \in I$, a to znači $||f_0|| \geq 1$. Dakle, vrijedi

$$||f_0|| = 1 \ .$$

Iz svega navedenog zaključujemo da je f_0 proširenje funkcionala f, bez promjene norme, ali takodje i proširenje svakog od funkcionala $f_i \in \mathcal{F}_0$. Dakle,

$$(\forall f_i \in \mathcal{F}_0) \ f_i \preceq f_0 \ ,$$

a što neznači ništa drugo do da lanac $\mathcal{F}_0$ ima bar jedno gornje ograničenje. Zbog proizvoljnosti lanca, a na osnovu Zornove leme, zaključujemo da u $\mathcal{F}$ postoji maksimalan element, označimo ga sa f^*. Kao prvo, imamo da je f^* proširenje funkcionala f, bez promjene norme, a kao drugo ostaje nam vidjeti da je ovaj funkcional definisan na čitavom X.
Kad to ne bi bilo, tj. $D_{f^*} \subset X$, postojao bi $z \in X$, takav da $z \notin D_{f^*}$. Tada bi funkcional f^*, na osnovu prvog dijela dokaza, mogli proširiti bez promjene norme na lineal

$$L_1^* = D_{f^*} \oplus L_1 \ ,$$

gdje je $L_1 = \{x \in X |\ x = \lambda z \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Medjutim, ovo bi značilo da f^* nije maksimalan element u $\mathcal{F}$, pa prema tome ova mogućnost otpada, tj. mora vrijediti

$$D_{f^*} = X \ ,$$

čime je teorem dokazan. ♣

Hahn-Banachov teorem je jedna "ogromna" teorema, a to potvrdjuju i mnoge posljedice, tj. tvrdnje koje se dokazuju koristeći ovaj teorem. Mi ćemo ovdje navesti samo neke od njih.

Teorem 4.2.2. *Neka je x_0 proizvoljan nenula element prostora X. Tada na X postoji linearan funkcional f^*, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = ||x_0||$.

Dokaz : Neka je $0 \neq x_0 \in X$ proizvoljan. Posmatrajmo lineal

$$L = \{x |\ x = \lambda x_0 \ , \ \lambda \in \Phi\} \ .$$

Definišimo $f : L \longrightarrow \Phi$, na sljedeći način, za $x = \lambda x_0 \in L$

$$f(x) = \lambda ||x_0|| \ .$$

Za $x', x'' \in L$ i $a, b \in \Phi$, imamo

$$f(ax'+bx'') = f(a\lambda' x_0 + b\lambda'' x_0) = f((a\lambda'+b\lambda'')x_0) = (a\lambda'+b\lambda'')||x_0|| = af(x')+bf(x'') \ ,$$

te je f linearan funkcional. Dalje imamo

$$||f|| = \sup_{x \in L\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||} = \sup_{\lambda \in \Phi} \frac{|\lambda| ||x_0|||}{||\lambda x_0||} = 1 \ .$$

Iz same definicije funkcionala vidimo da je zbog $x_0 = 1 \cdot x_0$

$$f(x_0) = ||x_0|| \ .$$

Pozivajući se sada na Hahn-Banachov teorem, dati funkcional f možemo produžiti na čitav prostor do funkcionala f^*, koji ima istu normu kao i f (tj. vrijedi prva osobina) i pri tome se poklapa sa funkcionalom f na L (tj. vrijedi druga tražena osobina). ♣

Teorem 4.2.3. *Neka je X Banachov prostor i neka je L pravi potprostor od X. Neka je $x_0 \in X \setminus L$. Tada postoji ograničen linearan funkcional f^* na X, takav da vrijedi*

- $||f^*|| = 1$.
- $f^*(x_0) = d = d(x_0, L)$.
- $(\forall x \in L)\ f^*(x) = 0$.

Dokaz : Neka je $x_0 \in X \setminus L$. Posmatrajmo skup

$$L_1 = \{x \in X |\ x = \lambda x_0\ ,\ \lambda \in \Phi\}\ .$$

L_1 je jednodimenzionalan potprostor od X, te je potprostor i

$$L' = L \oplus L_1\ ,$$

i pri tome se onda svaki $x \in L'$, na jednoznačan način može zapisati u obliku

$$x = l + \lambda x_0\ ,\ l \in L\ ,\ \lambda \in \Phi\ .$$

Definišimo na L' funkcional f_0 sa

$$f_0(x) = f_0(l + \lambda x_0) = \lambda d\ ,$$

gdje je d udaljenost elementa x_0 od potprostora L, tj. $d = d(x_0, L)$. Očigledno za $x \in L$ vrijedi $f_0(x) = 0$, a takodje i $f_0(x_0) = d$. Izračunajmo normu ovog funkcionala.

$$\begin{aligned}
||f_0|| &= \sup_{x \in L'} \frac{|f_0(x)|}{||x||} = \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|f_0(l + \lambda x_0)|}{||l + \lambda x_0||} \\
&= \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{|\lambda d|}{||l + \lambda x_0||} = \sup_{l \in L,\ \lambda \in \Phi} \frac{d}{||x_0 + \frac{l}{\lambda}||} \\
&= d \sup_{l' \in L} \frac{1}{||x_0 + l'||} = \frac{d}{\inf_{l' \in L} ||x_0 + l'||} \\
&= \frac{d}{d} = 1\ .
\end{aligned}$$

Ostaje nam samo primjeniti Hahn-Banachov teorem i utvrditi postojanje ovakvog funkcionala na čitavom prostoru. ♣

Sljedeća posljedica često se naziva teorem o postojanju dovoljnog broja neprekidnih funkcionala.

Teorem 4.2.4. *Neka je X Banachov prostor i neka su $x, y \in X$. Ako za svaki $f \in X^*$ vrijedi $f(x) = f(y)$, tada je $x = y$.*

Dokaz : Ako je $x \neq y$, onda je $x - y \neq 0$, pa na osnovu prve posljedice, postoji $f \in X^*$, takav da je $f(x-y) = ||x-y||$. Ovo znači da je $f(x) \neq f(y)$, pa kontrapozicijom imamo iskazanu tvrdnju. ♣

Ovaj teorem smo mogli iskazati i u ekvivalentnom obliku: Ako je $f(x) = 0$ za sve $f \in X^*$, onda je $x = 0$.

4.3 Reprezentacija ograničenih linearnih funkcionala

4.4 Konjugovani prostori

4.5 Slaba konvergencija

Glava 5

Hilbertovi prostori

5.1 Skalarni produkt. Hilbertovi prostori.

Definicija 5.1.1. *Neka je H linearan vektorski prostor nad poljem skarara Φ i neka je svakom paru $(x,y) \in H$ pridružen broj $(x,y) \in \Phi$, tako da vrijedi:*

1. $(\forall x \in H)\ (x,x) \geq 0$,
2. $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
3. $(\forall x,y \in H)\ (x,y) = \overline{(y,x)}$,
4. $(\forall x,y,z \in H)(\forall \alpha,\beta \in \Phi)\ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

Tada kažemo da je na H definisan skalarni proizvod.

Navedimo neke važnije osobine skalarnog produkta koje proizilaze iz same definicije.

Lema 5.1.1. $(\forall x,y,z \in H)(\forall \alpha,\beta \in \Phi)(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$.

Dokaz : Neka su $x,y,z \in H$ i $\alpha,\beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada vrijedi:

$$(x, \alpha y + \beta z) = \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y,x) + \beta(z,x)} = \overline{\alpha(y,x)} + \overline{\beta(z,x)}$$

$$= \overline{\alpha}\,\overline{(y,x)} + \overline{\beta}\,\overline{(z,x)} = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z).$$

♣

Lema 5.1.2. $(\forall x \in H)\ (x,0) = (0,x) = 0$.

Dokaz : Neka je $x \in H$ proizvoljan. Tada imamo

$$\left.\begin{array}{l}(0,x)=(0+0,x)=(0,x)+(0,x)\Rightarrow 0=(0,x)\\(x,0)=(x,0+0)=(x,0)+(x,0)\Rightarrow 0=(x,0)\end{array}\right\}\Rightarrow (x,0)=(0,x)=0.$$

♣

Lema 5.1.3. $(\forall x,y \in H)\quad |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$.

Dokaz : Neka su $x,y \in H$ i $\lambda \in \Phi$ proizvoljni. Na osnovu nenegativnosti skalarnog proizvoda vrijedi

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0 \ .$$

Uzimajući u obzir treću osobinu skalarnog proizvoda i Lemu 5.1.1, dobijamo

$$(x,x+\lambda y)+\lambda(y,x+\lambda y) = (x,x)+\overline{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+\underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{|\lambda|^2}(y,y) \geq 0 \ .$$

Stavimo li da je

$$\lambda = -\frac{(x,y)}{(y,y)} \ , \ (y \neq 0) \ ,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
& (x,x)+\overline{\left(-\frac{(x,y)}{(y,y)}\right)}\cdot(x,y)+\left(-\frac{(x,y)}{(y,y)}\right)\cdot(y,x)+\frac{|(x,y)|^2}{[(y,y)]^2}\cdot(y,y)\\
= \ & (x,x)-\frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)}-\frac{(x,y)\overline{(x,y)}}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\\
= \ & (x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}+\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0 \ ,
\end{aligned}$$

odakle je

$$(x,x) \geq \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \ .$$

Množeći zadnju nejednakost sa (y,y), dobijamo

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y). \tag{5.1}$$

Jasno je da za $y=0$ nejednakost (5.1) vrijedi trivijalno, pa (5.1) vrijedi za svaki $x,y \in H$. ♣

Ova nejednakost poznata je pod nazivom Schwartzova nejednakost ili nejednakost Cauchy-Schwartz-Buniakowskog.

Neka je sada H linearan vektorski prostor na kome je definisan skalarni produkt. Stavimo li za $x \in H$

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}\ , \tag{5.2}$$

jasno je da na osnovu definicije skalarnog produkta vrijede prve tri osobine norme. Provjerimo četvrtu osobinu. Za proizvoljne $x, y \in H$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) &= (x, x+y) + (y, x+y) \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \ . \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (5.1) i relaciju (5.2), iz gornjeg imamo

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad ,$$

odnosno vrijedi

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \ .$$

Dakle, sa (5.2) je uvedena norma na H za koju kažemo da je "izvire" iz skalarnog produkta, pa je H dakle normiran prostor.

Definicija 5.1.2. *Linaran vektorski prostor H na kome je definisan skalarni proizvod iz kojeg izvire norma data sa (5.2), nazivamo unitarnim vektorskim prostorom.*

Lema 5.1.4. *U unitarnom vektorskom prostoru vrijedi*

$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\Big]. \tag{5.3}$$

Dokaz : Slično malopredjašnjem postupku, lahko se pokazuje da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \tag{5.4}$$

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2 \tag{5.5}$$

$$i\|x+iy\|^2 = i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) + i\|y\|^2 \tag{5.6}$$

$$i\|x-iy\|^2 = i\|x\|^2 - (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \tag{5.7}$$

Sabirajući (5.4), (5.5), (5.6) i (5.7) dobijamo

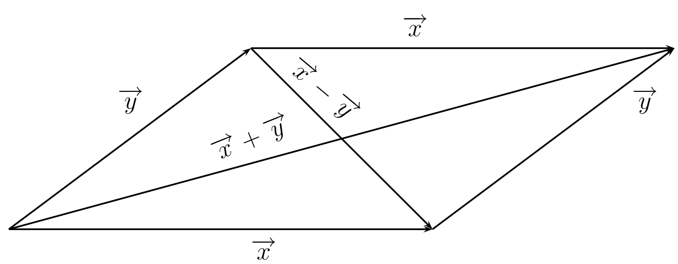
$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 - \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) - \|y\|^2 +$$
$$+ i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) + i\|y\|^2 - i\|x\|^2 + (x,y) - (y,x) - \|y\|^2 =$$
$$= 4 \cdot (x,y) \qquad ,$$

a odavde direktno slijedi jednakost (5.3). ♣

Lema 5.1.5 (**Relacija paralelograma**). *Neka je H unitaran vektorski prostor. Za proizvoljne $x, y \in H$ vrijedi relacija*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ . \qquad (5.8)$$



Dokaz :
Sabirajući jednakosti (5.4) i (5.5) dobijamo

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ ,$$

tj. relaciju paralelograma (5.8). ♣

Gornja tvrdnja predstavlja jednostavno geometrijsko pravilo da je zbir kvadrata dijagonala paralelograma jednak sumi kvadrata njegovih stranica. Medjutim, ovdje imamo i mnogo važniju činjenicu. Naime, ako u normiranom prostoru, za svaka dva vektora vrijedi (5.8), tada je taj prostor unitaran, tj. u njemu se može uvesti skalarni produkt iz koga izvire data norma. Ako ovo posmatramo u kontrapoziciji imamo tvrdnju da ukoliko nije zadovoljena jednakost (5.8), tada prostor nije unitaran.

Lema 5.1.6. *Skalarni proizvod je neprekidna funkcija svojih argumenata.*

Dokaz : Neka su dati nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$, takvi da $(x_n) \to x$ i $(y_n) \to y$, $(n \to \infty)$, tj.

$$\|x_n - x\| \to 0 \ \ , \ \ \|y_n - y\| \to 0 \ ; \ (n \to \infty) \ .$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
|(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \\
&= |(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)| \\
&\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\
&\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0 \ , \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(x_n, y_n) \to (x, y) \qquad (n \to \infty) \ ,$$

tj. skalarni produkt je neprekidan po obje koordinate. ♣

Neka je H unitaran vektorski prostor. Na osnovu Teorema 2.2.5, H se može upotpuniti do kompletnog normiranog prostora $\overline{H}$ i to tako da je H svuda gust u $\overline{H}$, tj. $\overline{H}$ je Banachov prostor. Pokažimo da je tada i prostor $\overline{H}$ unitaran.

Neka su $\overline{x}$,$\overline{y} \in \overline{H}$ proizvoljni. Tada postoje nizovi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ koji konvergiraju ka $\overline{x}$ i $\overline{y}$ redom. Jasno je da su ovi nizovi i u $\overline{H}$, a zbog konvergencije oni su i Cauchyjevi nizovi, pa vrijedi

$$\|x_n - x_m\| \to 0 \quad , \ \|y_n - y_m\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}
|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y_m) + (x_n, y_m) - (x_m, y_m)| \\
&= |(x_n, y_n - y_m) + (x_n - x_m, y_m)| \\
&\leq |(x_n, y_n - y_m)| + |(x_n - x_m, y_m)| \\
&\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y_m\| + \|x_n - x_m\| \cdot \|y_m\| \to 0 \ (n \to \infty) \ .
\end{aligned}$$

Dakle, $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$, a zbog kompletnosti $\mathbb{R}$, on je i konvergentan. To znači da postoji konačna granična vrijednost

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n).$$

Zbog neprekidnosti skalarnog produkta, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = (\overline{x}, \overline{y}) \ ,$$

odnosno, sve osobine koje važe za (x_n, y_n), se u graničnom procesu prenose na $(\overline{x}, \overline{y})$, pa je $(\overline{x}, \overline{y})$ skalarni produkt na $\overline{H}$.

Osim toga, za proizvoljan $\overline{x}$ iz $\overline{H}$, postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u H koji konvergira ka $\overline{x}$. Sada imamo

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n, x_n)}\ ,$$

odnosno,

$$\|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \sqrt{(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x_n)}.$$

Znači vrijedi

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{(\overline{x}, \overline{x})}.$$

Dakle, $\overline{H}$ je kompletan unitaran vektorski prostor iz čijeg skalarnog proizvoda izvire norma.

Definicija 5.1.3. *Kompletan linearan vektorski prostor snabdjeven skalarnim proizvodom iz kojeg izvire norma, naziva se Hilbertov prostor.*[1]

Primjer 5.1. Posmatrajmo realan n-dimenzionalni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza u $\mathbb{R}^n$. Tada se svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$ na jedinstven način može prikazati preko elemenata baze, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^n$ definišimo

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\ . \tag{5.9}$$

Provjerimo da li je ovim definisan skalarni produkt. Moramo provjeriti da li važe sve četiri osobine Definicije 5.1.1.

1. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Tada na osnovu jednakosti (5.9) vrijedi
$$(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \xi_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \geq 0\ .$$

[1] David Hilbert

2. Ako je $(x,x)=0$, to znači da je
$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2=0 \;\Leftrightarrow\; \xi_i=0\ ,\ i=1,2,\ldots,n\ ,$$
pa je $x=0$.

3. Neka su $x,y\in\mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada je na osnovu (5.9)
$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\xi_i=(y,x)\ .$$
S obzirom da se radi o realnom prostoru, to se znak konjugacije gubi, tj. vrijedi $(y,x)=\overline{(y,x)}$. Dakle, $(x,y)=(y,x)=\overline{(y,x)}$.

4. Neka su sada $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ i $a,b\in\mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je
$$ax+by=a\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i+b\sum_{i=1}^{n}\eta_ie_i=\sum_{i=1}^{n}a(\xi_ie_i)+\sum_{i=1}^{n}b(\eta_ie_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[(a\xi_i)e_i+(b\eta_i)e_i\right]=\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i+b\eta_i)e_i\ .$$
Iz ovoga zaključujemo
$$(ax+by,z)=\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i+b\eta_i)\mu_i=\sum_{i=1}^{n}(a\xi_i\mu_i+b\eta_i\mu_i)=\sum_{i=1}^{n}a\xi_i\mu_i+\sum_{i=1}^{n}b\eta_i\mu_i=$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mu_i+b\sum_{i=1}^{n}\eta_i\mu_i=a(x,z)+b(y,z)\ .$$

Dakle, sa (5.9) je zadat skalarni proizvod na $\mathbb{R}^n$. Provjerimo da li iz ovako definisanog skalarnog proizvoda izvire norma. U tom cilju stavimo da je
$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \ \text{ tj. } \ \|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{5.10}$$

Zbog načina na koji smo definisali funkciju $\|\cdot\|$, jasno je da vrijede prve tri osobine definicije norme. Provjerimo četvrtu, neka su $x,y\in\mathbb{R}^n$ proizvoljni. Tada je
$$x+y=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_ie_i=\sum_{i=1}^{n}(\xi_ie_i+\eta_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)e_i,$$

pa je

$$\|x+y\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \, .$$

Na osnovu nejednakosti Minkowskog imamo da je

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \, .$$

Dakle,

$$\|x+y\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\| + \|y\| \, ,$$

odnosno $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$, pa vrijedi i četvrta osobina norme. Znači sa (5.10) je definisana norma koja izvire iz skalarnog produkta. Ovim smo pokazali da je $\mathbb{R}^n$ unitaran vektorski prostor.

Kako su proizvoljne dvije norme na konačnodimenzionalnom prostoru ekvivalentne, $\mathbb{R}^n$ je kompletan prostor i u odnosu na normu (5.10). Dakle, $\mathbb{R}^n$ je kompletan vektorski prostor snadbjeven skalarnim proizvodom iz kojeg izvire norma, pa je s obzirom na Definiciju 5.1.3, $\mathbb{R}^n$ Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.2. Ako umjesto prostora $\mathbb{R}^n$ posmatramo prostor $\mathbb{C}^n$ i neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ njegova baza. Neka su

$$x = \sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i \;\; i \;\; y = \sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i,$$

reprezentacije vektora $x, y \in \mathbb{C}^n$ preko elemenata baze. Tada možemo definisati

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta_i} \, . \tag{5.11}$$

Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru, uzimajući da je

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2 \;\; \text{tj.} \;\; \|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

dolazimo do zaključka da je $\mathbb{C}^n$ Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.3. Posmatrajmo prostor l_2 i za $x, y \in l_2$ uvedimo

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \ . \tag{5.12}$$

Imamo da vrijedi:

1. Neka je $x \in l_2$ proizvoljan. Tada je

$$(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \geq 0 \ .$$

2. Osim toga,

$$(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_i = 0 \ (\forall i \in \mathbb{N}) \ \Leftrightarrow \ x = 0 \ .$$

3. Neka su $x, y \in l_2$ proizvoljni. Tada je

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \overline{x_i \cdot \overline{y_i}} \right)} = \overline{\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot \overline{x_i} \right)} = \overline{(y, x)}.$$

4. Neka su $x, y, z \in l_2$ i $\alpha, \beta \in \Phi$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha x + \beta y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i) \overline{z_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha x_i \overline{z_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta y_i \overline{z_i} =$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{z_i} + \beta \sum_{i=1}^{\infty} y_i \overline{z_i} = \alpha(x, z) + \beta(y, z).$$

Na osnovu Definicije 5.1.1, zaključujemo da je sa (5.12) definisan skalarni produkt na l_2. Uvedemo li

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \ , \tag{5.13}$$

lahko provjeravamo da je sa (5.13) definisana norma na l_2. S obzirom da je l_2 kompletan, to ovaj prostor zadovoljava sve uslove Definicije 5.1.3, pa je l_2 Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.4. Posmatrajmo prostor $L_2(G)$ i definišimo na ovom prostoru

$$(x,y)=\int_G x(t)\overline{y(t)}dt\ . \tag{5.14}$$

Za ovako definisano preslikavanje, vrijedi:

1. Neka je $x(t)\in L_2$ proizvoljna funkcija. Tada je

$$(x,x)=\int_G x(t)\overline{x(t)}dt=\int_G |x(t)|^2dt\geq 0\ .$$

2. Pored toga, vrijedi i

$$(x,x)=0\ \Leftrightarrow\ \int_G |x(t)|^2dt=0\ \Leftrightarrow\ |x(t)|^2=0\ \Leftrightarrow\ x(t)=0\ .$$

3. Neka su $x(t),y(t)\in L_2$ proizvoljne funkcije. Tada je

$$(x,y)=\int_G x(t)\overline{y(t)}dt=\overline{\int_G \overline{x(t)\overline{y(t)}}dt}=\overline{\int_G y(t)\overline{x(t)}dt}=\overline{(y,x)}.$$

4. Neka su $x(t),y(t),z(t)\in L_2$ i $\alpha,\beta\in\Phi$ proizvoljni. Tada je

$$(\alpha x+\beta y,z)=\int_G(\alpha x+\beta y)(t)\overline{z(t)}dt=\int_G \alpha x(t)\overline{z(t)}dt+\int_G \beta y(t)\overline{z(t)}dt=$$

$$=\alpha\int_G x(t)\overline{z(t)}dt+\beta\int_G \beta y(t)\overline{z(t)}dt=\alpha(x,z)+\beta(y,z)\ .$$

Dakle, sa (5.14) smo definisali skalarni proizvod na prostoru L_2 i lahko se pokaže da je sa

$$\|x\|^2=\int_G |x(t)|^2dt\ , \tag{5.15}$$

definisana norma na L_2. S obzirom da je L_2 kompletan prostor, to je na osnovu Definicije 5.1.3, $L_2(G)$ Hilbertov prostor. $\diamondsuit$

Primjer 5.5. Prostor $C[a,b]$ sa standardnom metrikom, nije Hilbertov prostor.
Ako bi bio, onda bi norma tog prostora

$$||x||=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\ ,$$

morala izvirati iz skalarnog produkta definisanog na tom prostoru, a takodje bi morala vrijediti i relacija paralelograma. Medjutim, posmatrajmo funkcije

$$f(t) = 1 \ , \ g(t) = \frac{t-a}{b-a} \ , \ t \in [a,b] \ .$$

Lahko se provjerava da vrijedi

$$||f|| = ||g|| = 1 \ , \ ||f-g|| = 1 \ \mathbf{i} \ ||f+g|| = 2 \ .$$

Ali sada imamo

$$||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 5 \neq 4 = 2||f||^2 + 2||g||^2 \ ,$$

tj. ne vrijedi relacija paralelograma. Dakle, posmatrani prostor nije Hilbertov prostor.

Ako bi smo probali analogijom sa L_2 prostorom da na $C[a,b]$ uvedemo skalarni produkt sa

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \ ,$$

a sa njim i normu koja izvire iz ovog skalarnog produkta

$$||f|| = \sqrt{(f,f)} = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \ ,$$

onda se pokazuje da ovakav prostor nije kompletan. Zaista neka je $C[0,1]$, posmatramo li niz

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (n+3)(t-\frac{1}{2}) & ; \ \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} \\ 1 & ; \ \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} < t \leq 1 \end{cases}$$

za vježbu ostavljamo da se pokaže da dati niz jeste Cauchyjev, ali da nije konvergentan u $C[0,1]$.

Naravno da bi sada mogli izvršiti kompletiranje ovog prostora, ali tada bi se dobio prostor $L_2[a,b]$, za koga smo već pokazali da je Hilbertov. $\diamondsuit$

5.2 Ortogonalnost i ortogonalni komplement

Definicija 5.2.1. *Neka je H Hilbertov prostor. Za vektore $x, y \in H$ kažemo da su ortogonalni ako i samo ako je $(x, y) = 0$. Tada pišemo $x \perp y$.*
Ako je fiksan element $x \in H$ ortogonalan na svaki vektor skupa $S \subset H$, kažemo da je x ortogonalan na S i pišemo $x \perp S$.
Ako je svaki vektor skupa $S_1 \subset H$ ortogonalan na svaki vektor skupa $S_2 \subset H$, kažemo da su skupovi ortogonalni i pišemo $S_1 \perp S_2$. Za proizvoljan $S \subset H$, uvodimo oznaku

$$S^{\perp} = \{x \in H | \ (\forall u \in S) \ x \perp u\} \ .$$

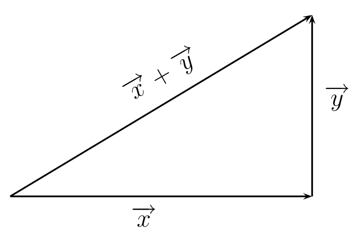
Sljedećim tvrdjenjem dajemo neke jednostavne karakteristike ortogonalnosti.

Lema 5.2.1. *Neka je H Hilbertov prostor i $x, y_n \in H$ ($n \in \mathbb{N}$).*

1. *Neka je $x \perp y_1$ i $x \perp y_2$. Tada za proizvoljne $a, b \in \Phi$ vrijedi $x \perp ay_1 + by_2$.*
2. *Neka je $x \perp y_n$ ($n \in \mathbb{N}$) i neka $y_n \to y_0$ ($n \to \infty$). Tada vrijedi $x \perp y_0$.*
3. *Ako je $x \perp S$, tada je $x \perp \overline{L(S)}$.*

Teorem 5.2.2 (Pitagorina teorema)**.** *Neka je H Hilbertov prostor. Ako su $x, y \in H$ ortogonalni, tada vrijedi*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



Dokaz :

Neka su $x, y \in H$, ortogonalni. Iz jednakosti (5.4), a na osnovu ortogonalnosti vektora imamo

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 0 + 0 + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \ . \end{aligned}$$

♣

Lema 5.2.3. *Ortogonalni komplement proizvoljnog podskupa Hilbertovog prostora H je potprostor od H.*

Dokaz : Zaista, neka je $A \subseteq H$ i neka su $x, y \in A^{\perp}$ i $\lambda, \mu \in \Phi$ proizvoljni. Tada je za proizvoljan $z \in A$

$$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) = 0 \ ,$$

tj. $\lambda x + \mu y \in A^{\perp}$, odnosno $A^{\perp}$ je linearan vektorski prostor.

Neka je sada $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^{\perp}$ proizvoljan konvergentan niz. Neka je y tačka konvergencije tog niza. Tada za proizvoljno $x \in A$, na osnovu neprekidnosti skalarnog produkta imamo

$$(x, y) = (x, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = 0 \ .$$

Dakle $y \in A^{\perp}$, pa je $A^{\perp}$ zatvoren skup, a to onda znači da je on potprostor od H. ♣

Definicija 5.2.2. *Neka je S podskup od H, pri čemu je H Hilbertov prostor. Za S kažemo da je konveksan skup ako vrijedi*

$$(\forall u, v \in S)(\forall \lambda \in [0,1]) \ \ \lambda u + (1-\lambda)v \in S \ .$$

Sljedeće dvije teoreme daju nam osnovne geometrijske karakteristike Hilbertovih prostora.

Teorem 5.2.4. *Neka je $S \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup. Tada*

$$(\forall x_0 \in H)(\exists_1 y_0 \in S) \ \ d(x_0, S) = \|x_0 - y_0\| \ .$$

Dokaz : Neka je $S \subseteq H$ konveksan i zatvoren skup i $x_0 \in H$ proizvoljan. Označimo

$$d(x_0, S) = \inf_{y\in S} d(x, y) = \inf_{y\in S} \|x_0 - y\| = d \ .$$

Na osnovu definicije infimuma, u S postoji niz $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $\|x_0 - y_n\| \to d \ (n \to \infty)$.

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo elemente $y_n - x_0,\ y_m - x_0 \in H$ i kako je H Hilbertov prostor, to za ove elemente vrijedi relacija paralelograma, tj.

$$\|y_n + y_m - 2x_0\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 \ ,$$

što je ekvivalentno sa

$$4\|x_0 - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{y'}\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 \ .$$

S obzirom da je po uslovu zadatka S konveksan skup, to je $y' \in S$, pa vrijedi

$$4\|x_0 - y'\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4(\inf_{y \in S} \|x_0 - y\|)^2 + \|y_n - y_m\|^2 \ ,$$

odnosno,

$$4\|x_0 - y'\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \geq 4d^2 + \|y_n - y_m\|^2 \ .$$

Iz posljednje dvije nejednakosti dobijamo

$$2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4d^2 \geq \|y_n - y_m\|^2 \ .$$

Puštajući da $m, n \to \infty$, zaključujemo da $\|y_n - y_m\| \to 0$, a to znači da je $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyev niz u $S \subseteq H$, i kako je H Hilbertov prostor, tj. kompletan, to je ovaj niz konvergentan. Dakle, postoji $y_0 \in H$, takav da $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$. Osim toga, zbog zatvorenosti skupa S je $y_0 \in S$. Sada je

$$d = d(x_0, S) = \inf_{y \in S} \|x_0 - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\| = \|x_0 - \lim_{n \to \infty} y_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

Ostaje da pokažemo da je ovakav element jedinstven. Pretpostavimo da postoje $y_0, y_0' \in S$, takvi da je

$$d(x_0, S) = \|x_0 - y_0\| \ \ \textbf{i} \ \ d(x_0, S) = \|x_0 - y_0'\| \ .$$

Kako je S konveksan skup, to za svako $\lambda \in [0,1]$ vrijedi $\lambda y_0 + (1 - \lambda) y_0' \in S$ i pri tome je

$$\|x_0 - (\lambda y_0 + (1 - \lambda) y_0')\| \geq d = d(x_0, S) \ .$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} d &\leq \|\lambda x_0 + (1-\lambda)x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0'\| \\ &= \|\lambda(x_0 - y_0) + (1-\lambda)(x_0 - y_0')\| \\ &\leq \|\lambda(x_0 - y_0)\| + \|(1-\lambda)(x_0 - y_0')\| \\ &= \lambda\|x_0 - y_0\| + (1-\lambda)\|x_0 - y_0'\| \\ &= \lambda d + (1-\lambda)d = d \ . \end{aligned}$$

Dakle, mora vrijediti

$$\|x_0 - (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0')\| = d\ ,$$

odnosno za proizvoljno $\lambda \in [0,1]$

$$\|x_0 - (\lambda y_0 + (1-\lambda)y_0')\|^2 = d^2\ .$$

Odavde na osnovu osobina skalarnog produkta imamo

$$\begin{aligned}
d^2 &= (x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0', x_0 - \lambda y_0 - (1-\lambda)y_0') \\
&= ((x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0'), (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) \\
&= (x_0 - y_0', (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) - \lambda(y_0 - y_0', (x_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0')) \\
&= (x_0 - y_0', x_0 - y_0') - \lambda(x_0 - y_0', y_0 - y_0') - \lambda(y_0 - y_0', x_0 - y_0') - \lambda^2(y_0 - y_0', y_0 - y_0') \\
&= \|x_0 - y_0'\|^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) + \lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2 \\
&= d^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) + \lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2\ .
\end{aligned}$$

Iz posljednjeg zaključujemo da za svako $\lambda \in [0,1]$, vrijedi

$$\lambda^2\|y_0 - y_0'\|^2 - \lambda\big((x_0 - y_0', y_0 - y_0') + (x_0 - y_0', x_0 - y_0')\big) = 0\ .$$

Kako je ovo kvadratni polinom po λ i mora biti jednak 0 za svako $\lambda \in [0,1]$, to će se dogoditi samo ako su koeficijenti tog polinoma jednaki 0. To izmedju ostalog znači da mora biti

$$\|y_0 - y_0'\|^2 = 0\ ,$$

iz čega onda dobijamo da je $y_0 = y_0'$. ♣

Teorem 5.2.5. *Neka je H Hilbertov prostor i H_1 potprostor prostora H. Tada za svaki $x \in H$ postoji tačno jedan $y \in H_1$, takav da je $(x-y) \perp H_1$.*

Dokaz : Kako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, to je H_1 zatvoren i konveksan skup, pa na osnovu Teoreme 5.2.4 vrijedi

$$(\forall x \in H)(\exists_1 y \in H_1)\ d(x, H_1) = \|x - y\|\ .$$

Neka su sada $u \in H_1$ i $\lambda \in \Phi$ proizvoljni. Tada je:

$$\|x - y - \lambda u\| \geq \|x - y\| \ \Leftrightarrow\ \|x - y - \lambda u\|^2 \geq \ \|x - y\|^2\ .$$

Zbog jednakosti (5.2) imamo da vrijedi

$$(x - y - \lambda u,\ x - y - \lambda u) \geq \|x - y\|^2.$$

Primjenjujući sada osobine skalarnog produkta na prethodnu nejednakost, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
& (x-y, x-y-\lambda u) - \lambda(u, x-y-\lambda u) \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-y, x-y) - \overline{\lambda}(x-y, u) - \lambda(u, x-y) + \lambda^2(u,u) \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \|x-y\|^2 - \overline{\lambda}(x-y, u) - \lambda(u, x-y) + \lambda^2\|u\|^2 \geq \|x-y\|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2\|u\|^2 \geq \overline{\lambda}(x-y,\ u) + \lambda(u,\ x-y)\ \ (\forall \lambda \in \Phi,\ \forall u \in H_1) \qquad (5.16)
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo sada dva slučaja:

1. $\lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda > 0$, tada iz (5.16) dobijamo

$$\lambda^2\|u\|^2 \geq \lambda(x-y, u) + \lambda(u, x-y).$$

Dijeljenjem ove nejednakosti sa $\lambda > 0$, dobijamo

$$(x-y, u) + (u, x-y) \leq \lambda\|u\|^2.$$

Pustimo li da $\lambda \to 0$, imamo da vrijedi

$$(x-y, u) + (u, x-y) \leq 0. \qquad (5.17)$$

2. $\lambda \in \mathbb{R},\ \ \lambda < 0$, tada iz (5.16) dobijamo

$$\lambda^2\|u\|^2 \geq \lambda(x-y, u) + \lambda(u, x-y).$$

Dijeljenjem ove nejednakosti sa $\lambda < 0$, dobijamo

$$(x-y, u) + (u, x-y) \geq \lambda\|u\|^2.$$

Pustimo li da $\lambda \to 0$, imamo da vrijedi

$$(x-y, u) + (u, x-y) \geq 0. \qquad (5.18)$$

Iz nejednakosti (5.17) i (5.18) dobijamo da za svako $u \in H_1$ mora biti

$$(x-y,\ u) + (u,\ x-y) = 0\ . \qquad (5.19)$$

Izvršimo li formalnu zamjenu u sa iu u (5.19) imamo

$$(x-y, iu)+(iu, x-y) = \overline{i}(x-y, u)+i(u, x-y) = -i(x-y, u)+i(u, x-y) = 0\ .$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti sa i, dobijamo da za svako $u \in H_1$ mora takodje biti

$$(u, x-y) - (x-y, u) = 0\ . \qquad (5.20)$$

Jednakosti (5.19) i (5.20) nam daju

$$(u, x - y) = (x - y, u) = 0 \ , \ \forall u \in H_1,$$

odnosno, $(x - y) \perp H_1$.

Pokažimo jedinstvenost ovakvog elementa. Neka su $y_1, y_2 \in H_1$ takvi da je

$$(x - y_1) \perp H_1 \quad \wedge \quad (x - y_2) \perp H_1 \ .$$

To znači

$$(\forall u \in H_1) \ (x - y_1, u) = 0 \ \wedge \ (x - y_2, u) = 0 \ ,$$

ili

$$(\forall u \in H_1) \ (x - y_1, u) - (x - y_2, u) = 0 \ .$$

Dakle, vrijedi

$$(\forall u \in H_1) \ (y_2 - y_1, u) = 0 \ .$$

Stavljajući sada da je $u = y_2 - y_1$, dobijamo

$$(y_2 - y_1, y_2 - y_1) = \|y_2 - y_1\|^2 = 0 \ ,$$

iz čega je onda $y_2 = y_1$. ♣

Ovaj teorem nam ustvari govori da ako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, tada svaki $x \in H$ možemo na jedinstven način napisati u obliku $x = y + z$, pri čemu je $y \in H_1$ i $z = x - y \perp H_1$. Naime, važi:

Teorem 5.2.6. *Neka je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H tada*

$$(\forall x \in H)(\exists! y \in H_1 \ \wedge \ \exists! z \perp H_1) \qquad x = y + z.$$

Ovo takodje možemo iskazati u sljedećoj terminologiji.

Teorem 5.2.7. *Ako je H_1 potprostor Hilbertovog prostora H, onda je H ortogonalna suma potprostora H_1 i $H_1^\perp$, u oznaci $H = H_1 \oplus H_1^\perp$.*

5.3 Ortonormirani sistemi

Definicija 5.3.1. *Skup vektora $E = \{e_\alpha | \alpha \in A\}$ u Hilbertovom prostoru H nazivamo ortogonalnim skupom ako vrijedi*

$$(\forall \alpha, \beta \in A) \ (\alpha \neq \beta \ \Rightarrow \ (e_\alpha, e_\beta) = 0) \ .$$

Skup E nazivamo normiranim skupom ako vrijedi

$$(\forall \alpha \in A)\ \|e_\alpha\| = 1\ .$$

Ako je E ortogonalan i normiran skup, onda kažemo da je E ortonormiran skup (ili ortonormiran sistem).

Definicija 5.3.2. *Za ortonormiran sistem kažemo da je maksimalan ako nije sadržan niti u jednom širem ortonormiranom sistemu.*

Teorem 5.3.1. *Skup $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem u Hilbertovom prostoru H ako i samo ako ne postoji nenula vektor u H, ortogonalan na sve vektore datog sistema.*

Dokaz : Neka je $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem i pretpostavimo da postoji $0 \neq x_0 \in H$, takav da je za sve $\alpha \in A$, $(x_0, e_\alpha) = 0$. Označimo sa $y_0 = \frac{x_0}{\|x_0\|}$. Tada je $\|y_0\| = 1$ i pri tome je sistem koji se sastoji od $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$ i vektora y_0 ortonormiran i strogo širi od $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$, što je u suprotnosti sa maksimalnošću sistema $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$.

Neka je $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$ ortonormiran sistem u H za koga je zadovoljeno da ako za neko $x \in H$ vrijedi

$$(\forall \alpha \in A)\ (x, e_\alpha) = 0\ ,$$

tada je $x = 0$. Ako pretpostavimo da to nije maksimalan ortonormiran sistem, onda bi postojao $y \neq 0$ takav da je $\{e_\alpha|\alpha \in A\} \cup \{y\}$ takodje ortonormiran sistem. Tada bi zbog ortogonalnosti ovog sistema moralo biti $y = 0$, što je u suprotnosti sa izborom vektora y. Dakle, $\{e_\alpha|\alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem. ♣

Teorem 5.3.2. *Svaki netrivijalan Hilbertov prostor sadrži maksimalan ortonormiran skup.*

Dokaz : Neka je H netrivijalan Hilbertov prostor, tada postoji $x \in H$ takav da je $x \neq 0$. Tada je skup $\{x_0\}$, gdje je $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$, normiran jer je $\|x_0\| = 1$. Označimo sa $\mathcal{S}$ familiju svih ortonormiranih sistema koji sadrže skup $\{x_0\}$ i uvedimo relaciju "$\preccurlyeq$" sa

$$S_1, S_2 \in \mathcal{S}\ ,\ S_1 \preccurlyeq S_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} S_1 \subseteq S_2\ .$$

Lahko se provjerava da je relacija uvedena na ovaj način, relacija poretka. Ako je $\mathcal{S}_\triangle$ lanac u $\mathcal{S}$, tj. totalno uredjen skup u $\mathcal{S}$, pokažimo da je tada

$$\overline{S} = \bigcup_{S \in \mathcal{S}_\triangle} S\ ,$$

ortonormiran skup. Zaista,

$$x \in \overline{S} \;\Rightarrow\; (\exists S' \in \mathcal{S}_\triangle)\; x \in S' \text{ i } S' \text{ ortonormiran } \;\Rightarrow\; \|x\| = 1\;,$$

što znači da je $\overline{S}$ normiran skup.

S druge strane, ako su $x, y \in \overline{S}$, onda

$$(\exists S_1, S_2 \in \mathcal{S}_\triangle)\; x \in S_1,\; y \in S_2,$$

te kako je $\mathcal{S}_\triangle$ lanac, to je $S_1 \preccurlyeq S_2$ ili $S_2 \preccurlyeq S_1$. Neka je $S_1 \preccurlyeq S_2$. Tada zbog načina na koji smo definisali relaciju "$\preccurlyeq$", imamo da je $S_1 \subseteq S_2$, a to znači $x, y \in S_2$. Kako je S_2 ortonormiran skup, to onda znači da je $(x, y) = 0$, tj. x i y su ortogonalni. Zbog njihove proizvoljnosti je $\overline{S}$ ortogonalan skup. Dakle, $\overline{S}$ je ortonormiran skup.

Za proizvoljan $S \in \mathcal{S}_\triangle$ vrijedi da je $S \subseteq \overline{S}$, što znači da je $\mathcal{S}_\triangle$ ograničen odozgo, pa na osnovu Zornove leme, postoji maksimalan element u $\mathcal{S}$ i neka je to $S_0 \in \mathcal{S}$. Sada je S_0 maksimalan ortonormiran skup u Hilbertovom prostoru H. ♣

Gornjim teoremom smo utvrdili važnu činjenicu da u svakom netrivijalnom Hilbertovom prostoru imamo maksimalan ortonormiran sistem, ali nismo dobili nikakvu informaciju o kardinalnosti tog sistema. Uz dodatne uslove na posmatrani Hilbertov prostor gornji teorem dobija precizniju formu. Dokažimo prvo jedno pomoćno tvrdjenje.

Lema 5.3.3. *Neka je $S \subseteq H$. Da bi skup $L(S)$ bio gust u H potrebno je i dovoljno da vrijedi*

$$x \in H\;,\; x \perp S \;\Rightarrow\; x = 0\;.$$

Dokaz : Neka je $S \subseteq H$ i neka je $L(S)$ gust u H. Za proizvoljno $x_0 \in H$, postoji $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L(S)$, takav da $x_n \to x_0$ ($n \to \infty$). Neka je $x_0 \perp S$, tj. za svako $s \in S$, $(x_0, s) = 0$. Kako je $L(S)$ skup konačnih linearnih kombinacija vektora iz S, to onda i za svako $x \in L(S)$ vrijedi $(x_0, x) = 0$, a tim prije vrijedi i $(x_0, x_n) = 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Iz neprekidnosti skalarnog produkta sada imamo

$$0 = (x_0, x_n) \to (x_0, x_0) = \|x_0\|^2\;,\; n \to \infty\;,$$

a to onda znači da mora biti $\|x_0\| = 0$, odnosno $x_0 = 0$.

Neka sada vrijedi, ako je $x \perp S$ onda je $x = 0$. Pretpostavimo da $L(S)$ nije gust u H, tj. $\overline{L(S)} \neq H$. Tada postoji $u \in H \setminus \overline{L(S)}$, i na osnovu Teoreme 5.2.6, postoje jedinstveni $y_0 \in \overline{L(S)}$ i $z_0 \perp \overline{L(S)}$, takvi da je $u = y_0 + z_0$. Pri tome mora biti $z_0 \neq 0$ jer $u \notin \overline{L(S)}$. Medjutim, kako je $z_0 \perp \overline{L(S)}$, to je tim prije $z_0 \perp S$, pa bi zbog učinjene pretpostavke moralo biti $z_0 = 0$. Dakle imamo kontradikciju, pa $L(S)$ mora biti gust u H. ♣

Teorem 5.3.4. ***(Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije)*** *Svaki separabilan Hilbertov prostor sadrži najviše prebrojiv ortonormiran sistem.*

Dokaz : Neka je H Hilbertov prostor i neka je $\{y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots\}$ svuda gust prebrojiv skup u H. Ako u ovom skupu krenemo od prvog elementa i izbacujemo sve one koji su linearna kombinacija nekih prethodnih mu elemenata, formiramo skup $\{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ koji je takodje najviše prebrojiv skup u H. Definišimo sada

$$D_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) & \cdots & (y_n, y_1) \\ (y_1, y_2) & (y_2, y_2) & \cdots & (y_n, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1, y_n) & (y_2, y_n) & \cdots & (y_n, y_n) \end{vmatrix} \quad , \ (n \in \mathbb{N}). \tag{5.21}$$

Formirajmo sistem

$$\begin{array}{l} (y_1, y_1)c_1 + (y_2, y_1)c_2 + \ldots + (y_n, y_1)c_n = 0 \\ (y_1, y_2)c_1 + (y_2, y_2)c_2 + \ldots + (y_n, y_2)c_n = 0 \\ \quad \vdots \\ (y_1, y_n)c_1 + (y_2, y_n)c_2 + \ldots + (y_n, y_n)c_n = 0 \end{array} \tag{5.22}$$

čija je determinanta upravo D_n. Ako je $D_n = 0$ sistem ima netrivijalno rješenje $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}) \neq 0$ i stavimo da je

$$\overline{y} = \overline{c_1} y_1 + \overline{c_2} y_2 + \ldots + \overline{c_n} y_n.$$

Kako su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno nezavisni i $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, \ldots, \overline{c_n}) \neq 0$, to je $\overline{y} \neq 0$. Množeći gornju jednakost sa y_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$), dobijamo

$$(\overline{y}, y_i) = \overline{c_1}(y_1, y_i) + \overline{c_2}(y_2, y_i) + \ldots + \overline{c_n}(y_n, y_i) = 0 \ , \ (i = 1, 2, \ldots, n) \ ,$$

odakle zaključujemo da vrijedi $(\overline{y}, \overline{y}) = 0$, što je ekvivalentno sa $\overline{y} = 0$, a ovo je u suprotnosti sa konstrukcijom elementa $\overline{y}$. Prema tome, $D_n \neq 0$, za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sada

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1) \\ (y_1,y_2) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_n,y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1}) \end{vmatrix} \quad , \; n \in \mathbb{N} \; , \; D_0 = 1. \tag{5.23}$$

Očigledno je svaki x_n linarna kombinacija elemenata $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Takodje iz

$$\sqrt{D_n D_{n-1}} \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i y_i + (-1)^{n-1} y_n D_{n-1} \quad (\beta_i \in \Phi) \; , \tag{5.24}$$

zbog $D_{n-1} \neq 0$ vrijedi

$$y_n = \frac{(-1)^{n-1}}{D_{n-1}} \big(\sqrt{D_n D_{n-1}} \cdot x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i y_i \big) \; ,$$

tj. i y_n su linearne kombinacije vektora x_k , ($k = 1, 2, ..., n$).

Pomnožimo sada x_n, dato sa (5.23), skalarno sa y_i dobijamo

$$(x_n, y_i) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \begin{vmatrix} (y_1,y_i) & (y_2,y_i) & \cdots & (y_n,y_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1,y_i) & (y_2,y_i) & \cdots & (y_n,y_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1}) \end{vmatrix} = 0 \quad , \; (1 \leq i \leq n{-}1).$$

Kako se svaki od vektora x_i, $(1 \leq i \leq n-1)$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora y_i, $(1 \leq i \leq n-1)$, slijedi da je

$$(x_n, x_i) = 0, \; (1 \leq i \leq n-1) \; .$$

To znači da za $i \neq j$, vrijedi $(x_i, x_j) = 0$, dakle, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ je ortogonalan sistem.

Množeći sada x_n, dato sa (5.23), sa y_n dobijamo

$$(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \begin{vmatrix} (y_1,y_n) & (y_2,y_n) & \cdots & (y_n,y_n) \\ (y_1,y_1) & (y_2,y_1) & \cdots & (y_n,y_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_1,y_{n-1}) & (y_2,y_{n-1}) & \cdots & (y_n,y_{n-1}) \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1} D_n}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} \, , \tag{5.25}$$

a množenjem (5.24) skalarno sa x_n dobijamo

$$\sqrt{D_n D_{n-1}}(x_n,x_n)=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i(y_i,x_n)+(-1)^{n-1}(y_n,x_n)D_{n-1}=(-1)^{n-1}D_{n-1}(y_n,x_n). \tag{5.26}$$

Sada iz jednakosti (5.25) i (5.26) slijedi

$$\begin{aligned}(x_n,x_n) &= \frac{(-1)^{n-1}D_{n-1}}{\sqrt{D_n D_{n-1}}}\cdot(y_n,x_n)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}D_{n-1}}{\sqrt{D_n D_{n-1}}}\cdot\frac{(-1)^{n-1}D_n}{\sqrt{D_n D_{n-1}}}\\ &= \frac{(-1)^{2n-2}D_n D_{n-1}}{D_n D_{n-1}}=1\ .\end{aligned}$$

Odavde je $\|x_n\|=1$, za proizvoljno $n\in\mathbb{N}$. Znači, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ čini normiran sistem. Dakle, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ čini ortonormiran sistem.

Neka je sada $x\in H$, takav da je za sve $i\in\mathbb{N}$, $(x,x_i)=0$. Ovo opet znači da je $(x,y_i)=0$ za sve $i\in\mathbb{N}$, ali to onda znači da je i $(x,y_i')=0$ za sve $i\in\mathbb{N}$. Kako je skup $\{y_i'|\ i\in\mathbb{N}\}$ gust u H, na osnovu Leme 5.3.3, zaključujemo da je $x=0$

Dakle,

$$(\forall x\in H)(\forall\ i\in\mathbb{N})\ \big((x,x_i)=0\ \Rightarrow\ x=0\big)\ ,$$

što na osnovu Teoreme 5.3.1 znači da je $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ maksimalan ortonormiran sistem u H. ♣

Teorem 5.3.5. *Neka je $S\subseteq H$ ortogonalan sistem vektora i neka su $x_i\in S$, $(i\in\mathbb{N})$. Tada red $\sum_{i=1}^{\infty}x_i$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2$.*

Dokaz : Označimo sa s_k i $\widetilde{s_k}$ redom parcijalne sume posmatranih redova,

$$s_k=\sum_{i=1}^{k}x_i\quad \text{i}\quad \widetilde{s_k}=\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|^2\ .$$

Sada za $m,k\in\mathbb{N}$, $m>k$ imamo

$$\|s_m-s_k\|^2=\Big\|\sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{i=1}^{k}x_i\Big\|^2=\Big\|\sum_{i=k+1}^{m}x_i\Big\|^2=\Big(\sum_{i=k+1}^{m}x_i,\ \sum_{i=k+1}^{m}x_i\Big). \tag{5.27}$$

Kako je S ortogonalan sistem vektora, to za svaki $i \neq j$ vrijedi $(x_i, x_j) = 0$, pa iz (5.27) imamo

$$\|s_m - s_k\|^2 = \sum_{i=k+1}^{m} \Big(x_i, \sum_{i=k+1}^{m} x_i\Big) = \sum_{i=k+1}^{m} \sum_{j=k+1}^{m} (x_i, x_j) = \sum_{i=k+1}^{m} (x_i, x_i) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{m} \|x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 - \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2 = \widetilde{s_m} - \widetilde{s_k}.$$

Ovo znači da niz $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira ako i samo ako niz $(\widetilde{s_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergira čime je tvrdnja dokazana. ♣

Definicija 5.3.3. *Neka je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ ortonormiran sistem vektora u Hilbertovom prostoru H. Brojeve oblika*

$$x_\alpha = (x, e_\alpha) \quad (\alpha \in A)$$

nazivamo Fourierovi koeficijenti vektora x u odnosu na sistem $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$.

Teorem 5.3.6. ***(Besselova nejednakost)***
Neka je $\{e_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ prebrojiv podsistem ortonormiranog sistema $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$. Tada vrijedi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dokaz : Neka je $\{e_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ prebrojiv podsistem ortonormiranog sistema $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$, to je i on sam ortonormiran sistem pa su sada $x_{\alpha_i} = (x, e_{\alpha_i})$ Fourierovi koeficijenti vektora x u odnosu na sistem $\{e_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Posmatrajmo sada razliku

$$x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}.$$

Za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \Big\|^2 \geq 0\ .$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left(x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}\right) \\
&= (x,x) - \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}}(x, e_{\alpha_i}) - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}(e_{\alpha_i}, x) + \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}}(e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}} \cdot x_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \cdot \overline{x_{\alpha_i}} + \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \cdot \overline{x_{\alpha_i}} \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \ ,
\end{aligned}$$

iz čega onda imamo

$$\sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Pustimo li u posljednjoj nejednakosti da $n \to \infty$, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2,$$

što je i trebalo dokazati. ♣

Teorem 5.3.7. *Za svaki vektor iz H najviše prebrojivo mnogo Fourierovih koeficijenata tog vektora može biti različito od 0.*

Dokaz : Neka je $x \in H$ proizvoljan, tada za njega vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2$$

pa imamo samo konačno mnogo Fourierovih koeficijenata vektora x kod kojih je modul veći od $\frac{1}{n}$. Neka je F_0 skup svih Fourierovih koeficijenata vektora x koji su različiti od 0, a F_n skup svih Fourierovih koeficijenata vektora x kod kojih je modul veći od $\frac{1}{n}$, tada je

$$F_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Kako su svi F_n konačni, to je F_0 najviše prebrojiv kao prebrojiva unija konačnih skupova. ♣

Iako znamo da je najviše prebrojivo mnogo Fourierovih koeficijenata x_α vektora x u odnosu na ortornormiran sistem $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ različito od 0, ipak ćemo pisati

$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha,$$

podrazumijevajući prebrojivost.

Teorem 5.3.8. *Neka je $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$ proizvoljan ortonormiran sistem vektora u Hilbertovom prostoru H. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *Sistem $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$ je maksimalan ortonormiran sistem u H;*

(b) $(\forall x \in H) \ x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha \ , \ \ x_\alpha = (x, e_\alpha);$

(c) $(\forall x \in H) \ \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2;$

(d) $(\forall x, y \in H) \ (x, y) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha} \ , \ \ x_\alpha = (x, e_\alpha), y_\alpha = (y, e_\alpha).$

Dokaz :

"$(a) \Rightarrow (b)$**"** Neka je $x \in H$ proizvoljan i $x_{\alpha_i} (i \in \mathbb{N})$ Fourierovi koeficijenti vektora x u odnosu na $\{e_\alpha | \alpha \in A\}$ koji su različiti od 0. Tada je na osnovu Besselove nejednakosti

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \leq \|x\|^2,$$

i iz

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \cdot 1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \cdot \|e_{\alpha_i}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2,$$

imamo da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty.$$

Dakle, red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_{\alpha_i} \cdot e_{\alpha_i}\|^2$$

konvergira, pa prema Teoremu 5.3.5 konvergira i red

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}.$$

Neka je suma tog reda

$$\widetilde{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \ .$$

Tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \to \widetilde{x} \quad (n \to \infty) \ ,$$

a množeći ovo skalarno sa proizvoljnim $y \in H$, imamo

$$\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, y \Big) \to (\widetilde{x}, y) \quad (n \to \infty) \ ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, y) = (\widetilde{x}, y) \ .$$

Stavimo li da je $y = e_{\alpha_j}$ dobijamo

$$(\widetilde{x}, e_{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} (e_{\alpha_i}, e_{\alpha_j}) = x_{\alpha_j} \|e_{\alpha_j}\| = x_{\alpha_j} \ , \ j \in \mathbb{N} \ .$$

Osim toga za $\alpha \neq \alpha_j \ (j \in \mathbb{N})$ vrijedi $(\widetilde{x}, e_\alpha) = 0$. Kako i za $x \in H$ vrijedi $(x, e_\alpha) = 0$ za $\alpha \neq \alpha_j \ (j \in \mathbb{N})$, to je

$$(x - \widetilde{x}, e_\alpha) = 0 \ (\forall \alpha \in A).$$

S obzirom da je $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem na osnovu (a), to imamo da je $x - \widetilde{x} = 0$ tj. $x = \widetilde{x}$. Sada vrijedi,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \text{ odnosno, } x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha.$$

"$(b) \Rightarrow (a)$" Neka je $x' \in H$ takav da je za proizvoljan $\alpha \in A$, $x'_\alpha = (x', e_\alpha) = 0$. Na osnovu (b) imamo

$$x' = \sum_{\alpha \in A} x'_\alpha e_\alpha \quad \Rightarrow \quad x' = 0.$$

Ovo znači, na osnovu Teoreme 5.3.1, da je $\{e_\alpha |\ \alpha \in A\}$ maksimalan ortonormiran sistem u H.

"$(b) \Rightarrow (c)$" Neka za proizvoljno $x \in H$ vrijedi

$$x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \ .$$

Tada zbog neprekidnosti skalarnog produkta imamo

$$||x||^2 = (x, x) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \ .$$

"$(c) \Rightarrow (b)$" Neka vrijedi

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_{\alpha_i}|^2 \quad \Rightarrow \quad \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x_{\alpha_i}|^2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \right\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\Leftrightarrow \qquad x \to \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \quad (n \to \infty),$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha.$$

"$(d) \Rightarrow (c)$" Neka vrijedi

$$(\forall x, y \in H) \quad (x, y) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha}.$$

Stavimo li da je $y = x$ dobijamo

$$(x, x) = \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{x_\alpha} = \sum_{\alpha \in A} |x_\alpha|^2.$$

"$(b) \Rightarrow (d)$" Neka vrijedi (b), tada

$$(\forall x, y \in H) \quad x = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha \ \ i \ \ y = \sum_{\alpha \in A} y_\alpha e_\alpha,$$

odnosno

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \ \ i \ \ y = \sum_{i=1}^{\infty} y_{\alpha_i} e_{\alpha_i},$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \to x \ \ i \ \ \sum_{i=1}^{n} y_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \to y \quad (n \to \infty),$$

$$\Rightarrow \qquad \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} e_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{n} y_{\alpha_i} e_{\alpha_i} \Big) \to (x, y) \quad (n \to \infty),$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i} \overline{y_{\alpha_i}} \to (x, y) \quad (n \to \infty),$$

$$\Rightarrow \qquad (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_i} \overline{y_{\alpha_i}} = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \overline{y_\alpha} \ .$$

♣

Teorem 5.3.9. *Svaka dva maksimalna ortonormirana sistema u Hilbertovom prosrtoru H imaju iste kardinalne brojeve.*

Dokaz : Neka su $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$ i $\{f_\beta | \ \beta \in B\}$ dva maksimalna ortonormirana sistema. Ako je H konačno dimenzionalan onda je ovo tvrdjenje poznato iz linearne algebre.

Pretpostavimo zato da je H beskonačne dimenzije. Fiksirajmo $\alpha \in A$ i pridružimo mu $B_\alpha = \{\beta \in B | (e_\alpha, f_\beta) \neq 0\}$. S obzirom da u $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$ ima najviše prebrojivo mnogo članova različitih od 0, to je B_α najviše prebrojiv. Dakle, za svaki $\alpha \in A$ B_α je konačan ili prebrojiv. Tada je

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Naime, ako bi postojao $\beta_0 \in B$ takav da $\beta_0 \notin B_\alpha$ niti za jedno $\alpha \in A$, onda bi imali da je $(e_\alpha, f_{\beta_0}) = 0$ za svaki $\alpha \in A$.
Odavde sada, zbog maksimalnosti sistema $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$, imamo da je $f_{\beta_0} = 0$ što povlači da je $\|f_{\beta_0}\| = 0$. Ovo je nemoguće jer je $\{f_\beta | \ \beta \in B\}$ normiran sistem. Dakle,

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \ \ \Rightarrow \ \ k(B) \leq \sum_{\alpha \in A} k(B_\alpha) \leq \aleph_0 \sum_{\alpha \in A} 1 = \aleph_0 \cdot k(A) = k(A).$$

Analognim postupkom se pokazuje da vrijedi $k(A) \leq k(B)$, pa na osnovu Cantor-Bernsteinove teoreme aključujemo

$$k(A) = k(B) \ ,$$

tj. vrijedi tvrdjenje teoreme. ♣

Definicija 5.3.4. *Kardinalni broj bilo kojeg maksimalnog ortonormiranog sistema $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$ u Hilbertovom prostoru H nazivamo topološkom dimenzijom prostora H, a skup $\{e_\alpha | \ \alpha \in A\}$, nazivamo ortonormirana (topološka) baza prostora H.*

Ostaje još da vidimo da li linearni fukcionali na Hilbertovim prostorima imaju neku odredjenu formu. Naime, neka je H Hilbertov prostor i neka je $y \in H$ proizvoljan fiksan vektor. Tada je očigledno sa

$$f(x) = (x, y) \ , \tag{5.28}$$

definisan linearan funkcional na H, na osnovu aksioma skalarnog produkta. Osim toga, na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog imamo

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq ||x|| ||y|| \ ,$$

iz čega zaključujemo da je f ograničen funkcional, šta više $||f|| \leq ||y||$.

Dakle, za fiksno $y \in H$, jednakost (5.28) opisuje jednu klasu ograničenih linearnih funkcionala na H. Kao što ćemo vidjeti iz daljeg, ograničeni linearni funkcionali na Hilbertovom prostoru i nemogu biti drugačije forme, naime vrijedi

Teorem 5.3.10. *Za proizvoljan ograničen linearan funkcional f na Hilbertovom prostoru H, postoji jednoznačno odredjen element $y \in H$, takav da je za proizvoljno $x \in H$ jednakošću (5.28) definisan funkcional f i pri tome vrijedi $||f|| = ||y||$.*

Dokaz : Neka je H Hilbertov prostor i $f \in H^*$. Označimo

$$H_0 = ker(f) = \{x \in H | \ f(x) = 0\} \ .$$

Na osnovu linearnosti i neprekidnosti funkcionala f, H_0 je potprostor od H. Ako je $H_0 = H$, jasno da možemo izabrati da je $y = 0$. Zato pretpostavimo da je $H_0 \neq H$, i neka je $y \notin H_0$ proizvoljan. Na osnovu Teorema 5.2.6, postoje jedinstveni $y' \in H_0$ i $y'' \perp H_0$, takvi da je

$$y = y' + y'' \ .$$

Kako $y \notin H_0$, mora biti $y'' \neq 0$, a osim toga onda vrijedi i $f(y'') \neq 0$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $f(y'') = 1$. Neka je sda $x \in H$ proizvoljan i neka je $f(x) = \alpha$. Označimo sa $x' = x - \alpha y''$. Tada imamo

$$f(x') = f(x - \alpha y'') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0 \ ,$$

te dakle $x' \in H_0$. Dalje onda imamo

$$(x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = (x', y'') + \alpha(y'', y'') = \alpha(y'', y'') \ .$$

Zbog uvedenog, sada imamo da vrijedi

$$f(x) = \alpha = \frac{(x, y'')}{y'', y''} = \left(x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) \ .$$

Stavljajući da je $y = \frac{y''}{(y'',y'')}$, zaključujemo da za proizvoljno $x \in H$, posmatrani funkcional ima vrijednost

$$f(x) = (x, y) \ ,$$

čime je egzistencija postojećeg $y \in H$ utvrdjena.

Ako pretpostavimo da postoji i $y_1 \in H$, takav da za proizvoljno $x \in H$ vrijedi

$$(x, y) = (x, y_1) \ ,$$

to bi značilo da je $(x, y - y_1) = 0$, tj. $y - y_1 \perp H$, a što je moguće samo ako je $y = y_1$.

Već smo pokazali da na osnovu nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog vrijedi $||f|| \leq ||y||$. Iz definicije norme funkcionala imamo

$$||f|| \geq f\left(\frac{y}{||y||} \right) = \frac{(y, y)}{||y||} = ||y|| \ ,$$

pa vrijedi $||f|| = ||y||$. ♣

Ovom teoremom još jednom možemo opravdati ranije uvedenu reprezentaciju ograničenih linearnih funkcionala na prostoru $L_2(\Omega)$,

$$f(x) = (x, y) = \int_\Omega x(t)\overline{y(t)}dt \ , \ x, y \in L_2(\Omega) \ ,$$

i na postoru l_2,

$$f(x) = (x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \overline{y_n} \ , \ x, y \in l_2 \ .$$

Literatura

[1] S. Aljančić: *Uvod u realnu i funkcionalnu analizu*, Beograd 1979.

[2] P. Alexandroff, H. Hopf: *Topologie*, Berlin, 1935.

[3] Dj. Kurepa : *Teorija skupova*, Školska knjiga, Zagreb, 1951

[4] A.N. Kolmogorov , S.V. Fomin : *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Volume 1 *Metric and normed spaces*, Rochester N. Y. , 1957

[5] L.B. Kantorovič , G.P. Akilov : *Funkcionaljnij analjiz*, Moskva, 1977

[6] B. Stanković : *Osnovi funkcionalne analize*, Naučna knjiga, Beograd, 1975