1 FOURIEROVE TRANSFORMACIJE[1]

UVOD

Definicija 1.1 *Integralne transformacije (INTEGRAL TRANSFORMATION)*
Integralna transformacija je transformacija $\mathcal{T}$ koja od zadane funkcije f(x) napravi novu funkciju $\widehat{f}(w)$ koja se pojavljuje u obliku integrala.

$f(x) \xrightarrow{\mathcal{T}} \widehat{f}(w)$,
$\mathcal{T}\{f(x)\} = \widehat{f}(w)$.

Primjeri

$\mathcal{L}\{f(x)\}$ Laplaceova transformacija -najvažnija transformacija u inženjerstvu
$\mathcal{F}\{f(x)\}$ Fourierove transformacije : Fourierova kosinusna transformacija
Fourierova sinusna transformacija
Fourierova transformacija

Primjena

Intergalne transformacije su alat za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, integralnih jednadžbi, a koriste se i u radu sa specijalnim funkcijama.

Ideja vodilja za Fourierovu transformaciju:

Peridičnu funkciju možemo razviti u Fourierov red (red trigonometrijskih funkcija).

Za neperidične funkcije ideja razvoja funkcije u Fourierov red dovodi do pojama Fourierovog integrala.

Fourierovu transformaciju zadane funkcije f dobivamo preko Fourierovog integrala te funkcije.

1.1 FOURIEROV RED (kratki podsjetnik)*

Definicija 1.2 *Fourierov red (FOURIER SERIE)*
Za periodičnu funkciju f(x) s periodom p=2L Fourierov red je

$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x)}$

gdje su a_0,a_n, b_n Fourierovi koeficijentiod f(x)

$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx.$

Ako je funkcija f(x) parna onda se Fourierov red funkcije f(x) reducira na Fourierov kosinusni red

$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L}x}, \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx.$

Ako je funkcija f(x) neparna onda se Fourierov red funkcije f(x) reducira na

[1]PRIMMAT -V:ČULJAK-(radni materijal 2006.)

Fourierov sinusni red

$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x}$, $\qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx.$

NAPOMENA 1.1 *Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \le x \le L$ onda ju možemo proširiti periodično s periodom 2L (po parnosti ili po neparnosti). Proširenu funkciju periodičnu s peridom 2L možemo razviti u Fourierov red.*

Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \le x \le L$ proširena po parnosti na $-L \le x \le L$ s periodom 2L onda proširenu funkciju možemo razviti u Fourierov kosinusni red.

Ako je zadana funkcija f(x) na segmentu $0 \le x \le L$ proširena po neparnosti na $-L \le x \le L$ s periodom 2L onda proširenu funkciju možemo razviti u Fourierov sinusni red.

NAPOMENA 1.2 *Skup funkcija* $\{\cos\frac{n\pi}{L}x, \sin\frac{n\pi}{L}x\}$ *zove se trigonometrijski sustav. Osnovno svojstvo tih funkcija je ortogonalnost na intervalu duljine 2L:*

$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx = 0, \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi}{L}\sin\frac{n\pi}{L}xdx = 0,$ *za* $m \neq n, m, n \in N$;

$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}xdx = 0$ *za sve* $m, n \in N$.

PRIMJER 1.1 *Razvij funkciju f(x),* $0 \le x \le L$ *u Fourierov kosinusni red:*

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} \frac{2}{L}x & , 0 \le x \le \frac{L}{2} \\ \frac{2}{L}(L-x) & , \frac{L}{2} \le x \le L. \end{array}$$

Rješenje:

Budući trebamo naći Fourierov kosinusni red onda ćemo zadanu funkciju proširiti po parnosti na $-L \le x \le L$ s periodom 2L:

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x, \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx.$

$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{L/2} f(x)dx + \frac{1}{L}\int_{L/2}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{L/2}\frac{2}{L}xdx +$

$\frac{1}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{2}{L}(L-x)dx = \frac{1}{2};$

$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$

$= \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\frac{2}{L}x\cos\frac{n\pi}{L}xdx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L}\frac{2}{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx =$ parcijalna integracija

$= \frac{4}{L^2}[\frac{L^2}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{n\pi}{2} - 1) - \frac{L^2}{2\pi n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{\pi^2 n^2}(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2})]$

$= \frac{4}{\pi^2 n^2}(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1).$

$a_1 = \frac{4}{\pi^2 1^2}(2\cos\frac{1\pi}{2} - \cos 1\pi - 1) = 0,$ svi neparni koeficijenti su 0;

$a_2 = \frac{4}{\pi^2 2^2}(2\cos\frac{2\pi}{2} - \cos 2\pi - 1) = -\frac{4}{\pi^2};$

$a_4 = \frac{4}{\pi^2 4^2}(2\cos\frac{4\pi}{2} - \cos 4\pi - 1) = 0 :$

$a_6 = \frac{4}{\pi^2 6^2}(2\cos\frac{6\pi}{2} - \cos 6\pi - 1) = -\frac{4}{9\pi^2};$

$a_8 = \frac{4}{\pi^2 8^2}(2\cos\frac{8\pi}{2} - \cos 8\pi - 1) = 0;$

$a_{10} = \frac{4}{\pi^2 10^2}(2\cos\frac{10\pi}{2} - \cos 10\pi - 1) = -\frac{4}{25\pi^2};$

....

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}[\cos\frac{2\pi}{L}x + \frac{1}{9}\cos\frac{6\pi}{L}x + \frac{1}{25}\cos\frac{10\pi}{L}x + ...],$

1.2 FOURIEROVA KOSINUSNA TRANSFORMACIJA I INTEGRAL

Definicija 1.3 *Fourierov kosinusni integral (Fourier cosine integral)*

Za parnu funkciju $f(x)$ kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog kosinusnog integrala ako

$\boxed{f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw}$,

gdje je $A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos wt dt$.

Definicija 1.4 *Fourierova kosinusna transformacija (Fourier cosine transform)*

Neka je f(x) parna funkcija. Funkcija $\widehat{f}_c(w)$ definirana sa

$\boxed{\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx}$

zove se Fourierova kosinusna transformacija. Proces dobivanja transformacije $\widehat{f}_c$ iz zadane funkcije f također se zove Fourierova kosinusna transformacija i označava $\mathcal{F}_c$, $\quad f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \widehat{f}_c(w), \quad \mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f}_c(w)$.

Definicija 1.5 *Inverzna Fourierova kosinusna transformacija (Inverse Fourier cosine transform)*

Neka je $\widehat{f}_c(w)$ Fourierova kosinusna transormacija funkcije f(x).
Funkcija f(x) definirana sa

$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}_c(w) \cos wx dw}$

zove se inverzna Fourierova kosinusna transformacija. Proces dobivanja funkcije f iz zadane Fourierove kosinusne transformacije $\widehat{f}_c$ također se zove inverzna Fourierova kosinusna transformacija i označava

$\mathcal{F}_c^{-1}, \quad \widehat{f}_c(w) \xrightarrow{\mathcal{F}_c^{-1}} f(x), \quad \mathcal{F}_c^{-1}\{\widehat{f}_c(w)\} = f(x)$.

NAPOMENA 1.3 *Fourierova kosinusna transformacija definira se pomoću Fourirovog kosinusnog integrala:*

U Fourierovom integralu $f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx dw$ *označimo* $A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \widehat{f}_c(w)$,

gdje je $\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos wt dt$. *Zato je*

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}_c(w) \cos wx dw$.

PRIMJER 1.2 *Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju $\widehat{f}_c(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):*

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{array} \right.$$

Rješenje:

$\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a c \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w}$.

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f}_c(w)$

PRIMJER 1.3 *Nađite Fourierovu kosinusnu transformaciju* $\widehat{f}_c(w)$ *funkcije zadane funkcije f(x):*

$f(x) = exp(-x), 0 < x < \infty.$

Rješenje:

$\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp(-x) \cos wx dx =$parcijalna integracija

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}.$

$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \widehat{f}_c(w);$

$\exp(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+w^2}.$

1.3 FOURIEROVA SINUSNA TRANSFORMACIJA I INTEGRAL

Definicija 1.6 *Fourierov sinusni integral (Fourier sine integral)*

Za neparnu funkciju$f(x)$ *kažemo da ima reprezentaciju pomoću Fourierovog sinusnog integrala ako*

$\boxed{f(x) = \int_0^\infty B(w) \sin wx dw}$,

gdje je $B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \sin wt dt.$

Definicija 1.7 *Fourierova sinusna transformacija (Fourier sine transform)*

Neka je f(x) neparna funkcija. Funkcija $\widehat{f}_s(w)$ *definirana sa*

$\boxed{\widehat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin wx dx}$

zove se Fourierova sinusna transformacija. Proces dobivanja transformacije $\widehat{f}_s$ *iz zadane funkcije f također se zove Fourierova sinusna transformacija i označava*

$\mathcal{F}_s, \qquad f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \widehat{f}_s(w), \qquad \mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f}_s(w).$

Definicija 1.8 *Inverzna Fourierova sinusna transformacija (Inverse Fourier sine transform)*

Neka je $\widehat{f}_s(w)$ *Fourierova sinusna transormacija funkcije f(x).*

Funkcija f(x) definirana sa

$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \widehat{f}_s(w) \sin wx dw}$

zove se inverzna Fourierova sinusna transformacija. Proces dobivanja funkcije f iz zadane Fourierove sinusne transformacije $\widehat{f}_s$ *također se zove inverzna Fourierova sinusna transformacija i označava*

$\mathcal{F}_s^{-1}, \qquad \widehat{f}_s(w) \xrightarrow{\mathcal{F}_s^{-1}} f(x), \qquad \mathcal{F}_s^{-1}\{\widehat{f}_s(w)\} = f(x).$

NAPOMENA 1.4 *Fourierova sinusna transformacija definira se pomoću Fourirovog sinusnog integrala:*

U Fourierovom sinusnom integralu $f(x) = \int_0^\infty B(w)\cos wx dw$ *označimo* $B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\widehat{f}_s(w)$,

gdje je $\widehat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin wt dt$. *Zato je*

$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \widehat{f}_s(w)\sin wx dw.$

PRIMJER 1.4 *Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju* $\widehat{f}_s(w)$ *funkcije zadane funkcije f(x):*

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{array}$$

Rješenje:

$\widehat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a c\sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}c\frac{1-\cos aw}{w}.$

$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f}_s(w)$

PRIMJER 1.5 *Nađite Fourierovu sinusnu transformaciju* $\widehat{f}_s(w)$ *funkcije zadane funkcije f(x):*

$f(x) = exp(-x), 0 < x < \infty.$

Rješenje:

$\widehat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin wx dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \exp(-x)\sin wx dx$ =parcijalna integracija

$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\exp(-x)}{1+w^2}[-w\cos wx - \sin wx]|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}.$

$\mathcal{F}_s\{f(x)\} = \widehat{f}_s(w);$

$\exp(-x) \xrightarrow{\mathcal{F}_s} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{w}{1+w^2}.$

1.3.1 SVOJSTVA FOURIROVIH SIN I COS TRANSFORMACIJA

TEOREM 1.1 *Ako je f(x) apsolutno integrabilna na [0,∞) i po dijelovima neprekidna na svakom konačnom intervalu onda Fourierova kosinusna* $\widehat{f}_c(w)$ *i sinusna transformacija* $\widehat{f}_s(w)$ *funkcije f(x) postoje.*

TEOREM 1.2 *svojstvo linearnosti*

Ako su f(x) i g(x) apsolutno integrabilne na [0,∞) i po dijelovima neprekidne na svakom konačnom intervalu onda za funkciju af(x)+bg(x) Fourierova kosinusna i sinusna transformacija postoje i vrijedi svojsvo linearnosti

$\mathcal{F}_c\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}_c\{f(x)\} + b\mathcal{F}_c\{g(x)\} = a\widehat{f}_c(w) + b\widehat{g}_c(w);$

$\mathcal{F}_s\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}_s\{f(x)\} + b\mathcal{F}_s\{g(x)\} = a\widehat{f}_s(w) + b\widehat{g}_s(w).$

Dokaz:
$\mathcal{F}_c\{af(x)+bg(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty (af(x)+bg(x))\cos wx dx$ =linearnost integrala
$= a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos wx dx + b\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(x)\cos wx dx = a\widehat{f_c}(w) + b\widehat{g_c}(w)$
$= a\mathcal{F}_c\{f(x)\} + b\mathcal{F}_c\{g(x)\}$.

TEOREM 1.3 *transformacija derivacije*
Neka je f(x) neprekidna i apsolutno integrabilna na [0,∞) i $lim_{x\to\infty}f(x)=0$. *Neka je f'(x) po dijelovima neprekidna na svakom konačnom intervalu. Tada vrijedi*
$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$;
$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$.

Dokaz:
$\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\cos wx dx$ =parcijalna integracija
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[f(x)\cos wx|_0^\infty + w\int_0^\infty f(x)\sin wx dx] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\widehat{f_s}(w)$
$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\}$.
$\mathcal{F}_s\{f'(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'(x)\sin wx dx$ =parcijalna integracija
$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}[f(x)\sin wx|_0^\infty - w\int_0^\infty f(x)\cos wx dx] = 0 - w\widehat{f_c}(w)$
$= -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}$.

PRIMJER 1.6 *Pokažite da vrijedi*
$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$;
$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$.

Rješenje:
$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)$;
$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w\mathcal{F}_c\{f'(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)$.

PRIMJER 1.7 *Nađite Fourierovu kosinusnu transfomaciju funkcije* $f(x) = exp(-ax), a > 0$.

Rješenje:
$f(x) = exp(-ax)$
$f\prime(x) = -aexp(-ax); f\prime(0) = -a$;
Iz $f"(x) = a^2exp(-ax) = a^2f(x)$i svojstva linearnosti slijedi da je
$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\}$.
Osim toga vrijedi $\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0) = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}a$.
Zato

$a^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} + a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, tj.
$\mathcal{F}_c\{f(x)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$.
Zapisujemo $\exp(-ax) \xrightarrow{\mathcal{F}_c} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$;
$\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+w^2}$.

1.4 FOURIEROVA TRANSFORMACIJA I INTEGRAL

Definicija 1.9 *Fourierov integral -realni oblik (Fourier integral-real form)*
Za funkciju f(x) kažemo da se može prikazati pomoću Fourierovog integrala u realnom obliku ako
$\boxed{f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw}$,
gdje su $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wtdt$;
$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wtdt$.

TEOREM 1.4 *Ako je f(x) neprekidna na svakom konačnom intervalu koja ima desnu i lijevu derivaciju u svakoj točki i ako postoji integral* $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x|dx$ *onda se f(x) može prikazati pomoću Fourirovog integrala (u realnom obliku).*
U točkama prekida funkcije f(x) vrijednost Fourirovog integrala jednaka je aritmetičkoj sredini limesa slijeva i sdesna u toj točki.

Definicija 1.10 *Fourierov integral - kompleksni oblik (Fourier integral-complex form)*
Za funkciju f(x) kažemo da se može prikazati pomoću Fourierovog integrala u kompleksnom obliku ako je
$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\exp[iw(x-t)]dtdw}$.

Izvod kompleksnog oblika iz realnog oblika Fourirovog integrala:
$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw$
$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos wt\cos wx + \sin wt\sin wx]dtdw$
= adicioni teorem za cos i parnost funkcije cos
$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw$
= [...] je parna funkcija od w
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw$
= dodamamo sumand=0 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wx-wt)dt]dw = 0$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wx-wt)dt]dw + i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wx-wt)dt]dw$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(wx-wt) + i\sin(wx-wt))dtdw$
= Eulerova formula $\exp(i\varphi) = cos\varphi + i\sin\varphi$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp[iw(x-t)]dtdw$.

Definicija 1.11 *Fourierova transformacija (Fourier transform)*
Za zadanu funciju f(x), funkcija $\widehat{f}(w)$ *definirana sa*
$\boxed{\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot\exp(-iwx)dx}$

zove se Fourierova transformacija. Proces dobivanja transformacije $\widehat{f}$ *iz zadane funkcije f također se zove Fourierova transformacija i označava*

$\mathcal{F}$, $\quad f(x) \stackrel{\mathcal{F}}{\to} \widehat{f}(w), \quad \mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w).$

Definicija 1.12 *Inverzna Fourierova transformacija (Inverse Fourier transform)*

Neka je $\widehat{f}(w)$ *Fourierova transormacija funkcije f(x).*

Funkcija f(x) definirana sa

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \exp(iwx)dw}$$

zove se inverzna Fourierova transformacija. Proces dobivanja funkcije f iz zadane Fourierove transformacije $\widehat{f}$ *također se zove inverzna Fourierova transformacija i označava*

$\mathcal{F}^{-1}$, $\quad \widehat{f}(w) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{\to} f(x), \quad \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} = f(x).$

NAPOMENA 1.5 *Fourierova transformacija definira se pomoću Fourirovog integrala:*

U Fourierovom integralu

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[iw(x-t)]dtdw$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iwt)dt] \exp(iwx)dw$

označimo unutarnji integral [...]

$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-iwt)dt.$

Zato je

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \exp(iwx)dw.$

PRIMJER 1.8 *Nađite Fourierovu transformaciju* $\widehat{f}(w)$ *funkcije zadane funkcije f(x):*

$$f(x) = \{ \begin{array}{ll} c, & 0 < x < a \\ 0, & x > a. \end{array}$$

Rješenje:

$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \int_0^a \exp(-iwx)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \frac{\exp(-iwa)-1}{-iw}.$

$\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w)$

Uočimo:

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} c \frac{\exp(-iwa)-1}{-iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c[\frac{\sin wa}{w} + i\frac{1-\cos wa}{w}] = \frac{1}{2}[\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w} + i\sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{1-\cos wa}{w}].$

$\widehat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{\sin aw}{w}.$

$\widehat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c \frac{1-\cos wa}{w}.$

PRIMJER 1.9 *Nađite Fourierovu transformaciju $\widehat{f}(w)$ funkcije zadane funkcije f(x):*

$f(x) = exp(-ax^2),\ a > 0.$

Rješenje:
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) \exp(-iwx)dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - iwx)dx =$ dopunjavamo na potpun kvadrat
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(\sqrt{a}x - \frac{iw}{2\sqrt{a}})^2]dx$
$=$ supstitucija $z = \sqrt{a}x - \frac{iw}{2\sqrt{a}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-z^2]dz$
$=$poznati integral $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-z^2]dx = \sqrt{\pi}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{w^2}{4a}) \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$
$= \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{w^2}{4a}).$
$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \exp(-\frac{w^2}{4a}).$
$\mathcal{F}\{f(x)\} = \widehat{f}(w).$

1.4.1 SVOJSTVA FOURIEROVIH TRANSFORMACIJA

TEOREM 1.5 *Ako je f(x) apsolutno integrabilna na $[0, \infty)$ i po dijelovima neprekidna na svakom konačnom intervalu onda Fourierova transformacija $\widehat{f}(w)$ funkcije f(x) postoji.*

TEOREM 1.6 *svojstvo linearnosti*
Neka funkcije f(x) i g(x) imaju Fourierove transformacije. Tada za bilo koje konstante a i b funkcija $af(x) + bg(x)$ ima Fourierovu transformaciju i vrijedi svojsvo linearnosti
$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\} = a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w).$

Dokaz:
$\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x)) \exp(-iwx)dx =$linearnost integrala
$= a\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx + b\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \exp(-iwx)dx$
$= a\widehat{f}(w) + b\widehat{g}(w)$
$= a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}.$

TEOREM 1.7 *Transformacija funkcije pomaknute u varijabli x-a*
Neka f(x) ima Fourierovu transformaciju.Tada vrijedi
$\boxed{\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \exp(-iwa) \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}}$.

Dokaz:
$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) \exp(-iwx)dx$
$=$ supstitucija $x - a = p$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp[-iw(p+a)]dp$
$= \exp(-iwa) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \exp(-iwp)dp$
$= \exp(-iwa) \cdot \mathcal{F}\{f(x)\}.$

$\widehat{f}(w-a) = \exp(-iwa)\widehat{f}(w).$

TEOREM 1.8 *Transformacija derivacije*

Neka je f(x) neprekidna na R i $lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. *Neka je f'(x) po dijelovima apsolutno integrabilna na R. Tada vrijedi*

$\boxed{\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw\mathcal{F}\{f(x)\}}$.

Dokaz:

$\mathcal{F}\{f'(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \exp(-iwx)dx$
$=$ parcijalna integracija
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(f(x) \exp(-iwx)|_{-\infty}^{\infty} - (-iw)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iwx)dx)$
$= iw\widehat{f}(w)$
$= iw\mathcal{F}\{f(x)\}.$

PRIMJER 1.10 *Pokažite da vrijedi*

$\boxed{\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}}$.

Rješenje:

$\mathcal{F}\{f''(x)\} = iw\mathcal{F}\{f'(x)\} = iw[iw\mathcal{F}\{f(x)\}] = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}.$

PRIMJER 1.11 *Nađite Fourierovu transfomaciju funkcije* $f(x) = x\exp(-x^2)$
.

Rješenje:

Koristimo primjer
$g(x) = \exp(-x^2), \widehat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{w^2}{4})$
i svojstvo $\mathcal{F}\{g'(x)\} = iw\mathcal{F}\{g(x)\}$.
$f(x) = x\exp(-x^2) = -\frac{1}{2}g'(x)$
$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{-\frac{1}{2}g'(x)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{g'(x)\} = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\{g'(x)\} = -\frac{1}{2}iw\mathcal{F}\{g(x)\}$
$= -\frac{1}{2}iw\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{w^2}{4}).$

TEOREM 1.9 *Transformacija konvolucije funkcija*

Neka su f(x) i g(x) po dijelovima neprekidne funkcije, ograničene i apsolutno integrabilne na R.

Tada knovolucija funkcija

$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)g(p)dp$

ima Fourierovu transformaciju

$\boxed{\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\} \cdot \mathcal{F}\{g(x)\}}$

i vrijedi

$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) \cdot \widehat{g}(w) \exp(iwx)dw}$.

Dokaz:
$\mathcal{F}\{(f*g)(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(x-p)dp]\exp(-iwx)dx$
=supstitucija $z = x - p$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)g(z)\exp[-iw(z+p)]dpdz$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)\cdot g(z)\exp(-iwz)dpdz$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)dp\cdot\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\exp(-iwz)dz$
$= \sqrt{2\pi}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\exp(-iwp)dp\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\exp(-iwz)dz]$
$= \sqrt{2\pi}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)$
$= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f(x)\}\cdot\mathcal{F}\{g(x)\}.$
Prema definiciji inverzne Fourierove transformacije
$(f*g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\widehat{f*g})(w)\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)\exp(iwx)dw$
$= \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cdot\widehat{g}(w)\exp(iwx)dw.$

1.5 PRIMJENE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE U PDJ

Ako je početni ili rubni problem zadan na R_+ onda se mogu koristiti Fourierova kosinus ili sinus transformacija, a ako je problem zadan na cijelom R onda koristimo Fourierovu transformaciju.

PRIMJER 1.12 *PROVOĐENJE TOPLINE KROZ ŠTAP*
Naći temperaturu u(x,t) u štapu konstantnog presjeka uz početne i rubne uvjete:
$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$
Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty.$

Rješenje:
Prisjetimo se:
$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$
$t \geq 0, u(0,t) = 0, u(L,t) = 0.$
$u(x,0) = f(x), -L < x < L.$
Koristeći Fourierovu metodu (separacije varijabli) i razvoj funkcije f(x) u Fourierov red nalazimo rješenje
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\exp[-(\frac{cn\pi}{L})^2 t]\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x,$
gdje je $E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.$
Treba riješiti rubni problem
$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$
$t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty.$
$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty.$

Ideja: 1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju u odnosu na varijablu x,

$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t)$,

2. korak: naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, koristeći Fourierovu transformaciju funkcije f(x),

3. korak: naći inverznu Fourierovu transformaciju $u(x,t)$.

$\boxed{\text{PDJ } \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \text{ za funkciju } u(x,t)}$

1. korak:

$\mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\} = \mathcal{F}\{c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}$
$= c^2\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}$
=transformacija druge derivacije
$= c^2(-w^2\mathcal{F}\{u(w,t)\})$.

Lijevu stranu računamo po definiciji Fourierove transformacije

$\mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)dx$
= svojstvo da integral i derivacija mogu zamijeniti mjesta
$= \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)dx]$
$= \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(w,t)\}$.

ODJ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(w,t)\} = -c^2w^2\mathcal{F}\{u(w,t)\}$

ili zapisujemo

$\boxed{\text{ODJ} \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(w,t) = -c^2w^2\widehat{u}(w,t) \text{ za Fouierovu transformaciju } \widehat{u}(w,t).}$

2. korak:

Rješenje ODJ za funkciju $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t je (separacija varijabli)

$\widehat{u}(w,t) = C\exp(-c^2w^2t)$, gdje konstanta C=C(w).

Funkciju C(w) određujemo primjenjujući Fourierovu transformaciju na početni uvjet $u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty$.

$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}$, tj. $\widehat{u}(w,0) = \widehat{f}(w)$.

Zato je $\widehat{u}(w,0) = C(w) = \widehat{f}(w)$, a

$\boxed{\text{rješenje ODJ } \widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)\exp(-c^2w^2t)}$,

gdje je $\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\exp(-iwx)dx$.

3. korak:

Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(w,t)\cdot\exp(iwx)dw}$.

(a) Uvrstimo poznate Fourierove transformacije i primijenimo zamjenu poretka integracije

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\cdot\exp(-iwp)dp]\cdot\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-iwp)\cdot\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp(iwx)dw]dp$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\exp[i(wx-wp)]dw]dp$
=Eulerova formula $\exp(i\varphi) = cos\varphi + i\sin\varphi$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot[\cos(wx-wp)+i\sin(wx-wp)]dw]dp$
=integral imaginarnog dijela je jednak 0 jer je neparna funkcija
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\cos(wx-wp)dw]dp$
=integral realnog dijela je jednak dvostrukom integralu na $[0,\infty)$ jer je parna funk.
$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)[\int_{0}^{\infty}\exp(-c^2w^2t)\cdot\cos(wx-wp)dw]dp$

=unutarnji integral rješavamo koristeći $\int_0^\infty \exp(-\varphi^2)\cdot\cos(2b\varphi)d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2)$

=supstitucija $w = \frac{\varphi}{c\sqrt{t}}, b = \frac{x-p}{2c\sqrt{t}}$;

$= \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\exp[-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}]dp.$

$\boxed{\text{Rješenje PDJ } u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} f(p)\cdot\exp[-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}]dp}$.

(b) Koristeći transformaciju konvolucije.

PRIMJER 1.13 *VALNA JEDNADŽBA*

Naći progib $u(x,t)$ *beskonačne žice,* $-\infty < x < \infty$, *koja poprečno oscilira uz početne i rubne uvjete:*

$u(x,0) = f(x)$,*početni progib,*

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0$, *početna brzina*

Za svaki $t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty.$

Rješenje:

Prisjetimo se:

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$

$t \geq 0, u(0,t) = 0, u(L,t) = 0.$

$u(x,0) = f(x), -L < x < L$

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0.$

Koristeći Fourierovu metodu (separacije varijabli) i razvoj funkcije f(x) u Fourierov red nalazimo rješenje

$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t)\cdot\sin(\frac{n\pi}{L}x)$,

gdje je $E_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x.$

Koristeći adicioni teorem za $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha)]$.

$u(x,t) = \frac{1}{2}[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)]$,

gdje je f^* neparna peridična funkcija dobivna od f proširivanjem po neparnosti na [-L,L]

Treba riješiti rubni problem

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)$

$t \geq 0, u(x,t) \to 0, \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) \to 0, |x| \to \infty.$

$u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty,$

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0.$

Ideja: 1. korak: Primijeniti Fourierovu transformaciju u odnosu na varijablu x,

$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = \widehat{u}(w,t),$

2. korak: naći rješenje ODJ za $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t, koristeći Fourierovu transformaciju funkcije f(x),

3. korak: naći inverznu Fourierovu transformaciju $u(x,t)$.

$\boxed{\text{PDJ } \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \text{ za funkciju } u(x,t)}$

1. korak:

$$\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\} = \mathcal{F}\{c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}$$
$$= c^2\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\}$$

=transformacija druge derivacije
$= c^2(-w^2\mathcal{F}\{u(w,t)\})$.

Lijevu stranu računamo po definiciji Fourierove transformacije

$\mathcal{F}\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)dx$
= svojstvo da integral i derivacija mogu zamijeniti mjesta
$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\cdot\exp(-iwx)dx]$
$= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(w,t)\}$.

ODJ $\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}\{u(w,t)\} = -c^2w^2\mathcal{F}\{u(w,t)\}$

ili zapisujemo

$\boxed{\text{ODJ} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(w,t) + c^2w^2\widehat{u}(w,t) = 0 \text{ za Fouierovu transformaciju } \widehat{u}(w,t).}$

2. korak:

Rješenje ODJ za funkciju $\widehat{u}(w,t)$ po varijabli t je (homogena, drugog reda s konstantnim koeficijentima)

$\widehat{u}(w,t) = A\cos(cwt) + B\sin(cwt)$, gdje su konstante $A = A(w), B = B(w)$.

Funkcije $A(w)$ i $B(w)$ određujemo primjenjujući Fourierovu transformaciju na početne uvjete

$u(x,0) = f(x), \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, -\infty < x < \infty$.

$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}$, tj. $\widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)$;
$\mathcal{F}\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u(x,0)\}$,tj. $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(w,0) = 0$.

Zato je $\widehat{u}(w,0) = A(w) = \widehat{f}(w)$, a
$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(w,0) = cwB(w) = 0$.

$\boxed{\text{rješenje ODJ } \widehat{u}(w,t) = \widehat{f}(w)\cos(cwt)}$,

gdje je $\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\exp(-iwx)dx$.

3. korak:

Inverzna Fourierova transformacija od $\widehat{u}(w,t)$ je $u(x,t)$:

$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(w,t)\cdot\exp(iwx)dw}$.

Koristeći transformaciju funkcije pomaknute u varijabli x-a:

$\widehat{f}(w-a) = \exp(-iwa)\widehat{f}(w)$,

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cos(cwt)\cdot\exp(iwx)dw$
=definicija $\cos\varphi = \frac{\exp(i\varphi)+\exp(-i\varphi)}{2}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cdot\frac{\exp(icwt)+\exp(-icwt)}{2}\cdot\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cdot\exp(icwt)\cdot\exp(iwx)dw$
$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w)\cdot\exp(-icwt)\cdot\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w+ct)\cdot\exp(iwx)dw$
$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(w-ct)\cdot\exp(iwx)dw$
$= \frac{1}{2}\cdot f(x+ct) + \frac{1}{2}\cdot f(x-ct)$.

$\boxed{\text{Rješenje PDJ } u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct)}$.

DISKRETNE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE (DFT)