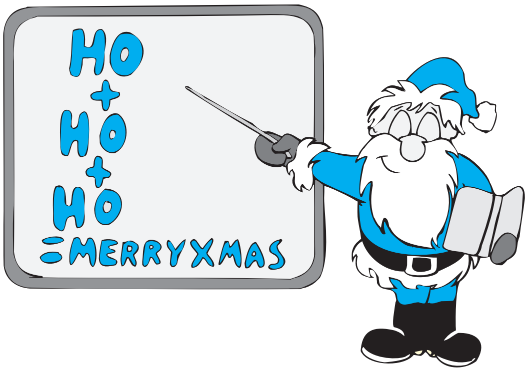
Matematički zadatak



Zdravko Kurnik, Zagreb

Rješavanje zadataka je najčešća djelatnost učenika. Tim postupkom ostvaruju se mnogi zadaci nastave matematike. Cilj je ovog članka dati kratki opis matematičkog zadatka, njegove uloge u nastavi matematike i glavnih pitanja u vezi s njim.

Suvremena nastava matematike načelno pretpostavlja drugačiju spoznajnu djelatnost učenika od tradicionalne. Težište se postavlja na razvijanje umijeća samostalnog i stvaralačkog proučavanja matematike od strane učenika, te stvaranje preduvjeta za uspješnu primjenu stečenih matematičkih znanja i umijeća.

Samostalna spoznajna djelatnost učenika pri proučavanju matematike ostvaruje se u velikoj mjeri primjerenim izborom i korištenjem nastavnih zadataka. Na taj način zadaci postaju važno sredstvo pri oblikovanju u učenika sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika i doprinose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i stvaralačkog mišljenja.

O uspješnoj primjeni zadataka u nastavi matematike ovisi i stupanj pripremljenosti učenika za sljedeću razinu njihovog matematičkog obrazovanja ili za njihovu praktičku djelatnost u nekom drugom području.

A) Sastav zadatka

Zadatak je složen matematički objekt i njegov sastav nije uvijek jednostavno analizirati. Međutim, prirodno se u širem smislu izdvaja pet njegovih osnovnih sastavnica:

a) *Uvjeti.* Sastavni dijelovi svakog zadatka u užem smislu su poznate ili dane veličine, nepoznate ili tražene veličine i objekti i uvjeti koji opisuju veze između danih i nepoznatih veličina i objekata. Uočavanje navedenih sastavnih dijelova zadatka bitno je za njegovo razumijevanje.

b) *Cilj.* Što je cilj zadatka, najčešće je vrlo lako naznačiti. Kod jedne vrste zadataka to je pronalaženje rezultata, tj. određivanje nepoznatih veličina, svojstava i veza među njima. Kod druge vrste zadataka to je izvođenje zaključaka i opravdavanje postavljenih tvrdnji.

c) *Teorijska osnova.* Za nalaženje rješenja bilo kojeg zadatka potrebno je stanovito znanje. To su one teorijske činjenice koje su u najužoj vezi s uvjetima i ciljem zadatka. One se otkrivaju primjenom analize. Proučavanjem uvjeta, njihovim raščlanjivanjem na dijelove i primjenom nađenih teorijskih činjenica spoznaju se i ustanovljuju odnosi među danim i nepoznatim veličinama. Time se otkriva put rješavanja zadatka.

d) *Rješavanje.* Rješavanje zadatka je prijelaz od uvjeta do rezultata, tj. način postizanja cilja zadatka. Provodi se nakon iscrpne analize u kojoj je otkriven put rješavanja.

e) *Osvrt.* Pozornost koja se nekom zadatku poklanja obično završava nalaženjem njegovog rješenja. Kada je to rješenje nađeno, prelazi se na sljedeći zadatak i prethodni zadatak kao da više ne postoji. Čak se možda nije ni provjerilo je li dobiveno rješenje ispravno! Tako ispada da je brzo nalaženje rješenja najvažnije u čitavom procesu rješavanja zadatka i jedina njegova svrha. A nije tako. Već su procjena rezultata na početku i provjera dobivenog rezultata na kraju rješavanja važni koraci pravilne primjene zadataka u nastavi matematike. Svaki zadatak treba u nastavnom procesu igrati veću i obrazovnu i odgojnu ulogu. Zato je od posebne važnosti ova sastavnica zadatka. Ona pruža mogućnosti ispitivanja novih ideja i daljnjih usmjeravanja mišljenja učenika. Određeno usmjeravanje dade se najbrže postići nekim od ovih pitanja:

Može li se način rješavanja zadatka pojednostavniti? Dade li se zadatak riješiti na neki drugi način? Jesmo li opisani postupak rješavanja već koristili kod nekog drugog zadatka? Može li se zadatak pojednostavniti? Može li se zadatak poopćiti? Možete li sastaviti neki sličan zadatak? Kako glasi obrnuta tvrdnja? Vrijedi li obrnuta tvrdnja?

Pitanja očito upućuju na važne znanstvene postupke kao što su analiza, sinteza, analogija specijalizacija, generalizacija i dr. Traženjem odgovora na ta pitanja razvijaju se i njeguju određene sposobnosti učenika i njihova kreativnost podiže na višu razinu. Pogledajmo za ilustraciju jedan zadatak s naših natjecanja s malo detaljnijim osvrtom.

Zadatak. Riješimo sustav jednadžbi

$$y+z=1, \quad x+z=2, \quad x+y=3.$$

Rješenje. a) Ovaj zadatak je najprije primjer zadatka s više načina rješavanja. Prvi način počinje eliminacijom nepoznanice z iz prve dvije jednadžbe, a zatim slijedi rješavanje školskog sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice x i y. Drugi način počinje zbrajanjem svih triju jednadžbi, a zatim slijedi njihovo oduzimanje redom od dobivene jednadžbe $x+y+z=3$. To je već jedna kvaliteta ovog zadatka. Međutim, nas ovdje više zanima što možemo dodatno naučiti učenike u vezi s ovim zadatkom.

b) Prirodna i jednostavna ideja je da se brojevi 1, 2 i 3 na desnim stranama jednadžbi zamijene promjenjivim veličinama a, b i c i promatra sustav

$$y+z=a, \quad x+z=b, \quad x+y=c.$$

Korist od ovakvog postupka za razvoj mišljenja učenika je velika. Na taj način oni uče *generalizirati* zadatke. Općeniti sustav daje više mogućnosti za daljnja razmišljanja. Evo dvije izvedene činjenice:

Ako je broj c aritmetička sredina brojeva a i b, tada je i nepoznanica z aritmetička sredina nepoznanica x i y.

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, tada su x, y i z polumjeri kružnica opisanih oko njegovih vrhova koje se međusobno dodiruju izvana (v. [1]).

c) Nije teško doći ni na pomisao da se umjesto dobivenog sustava promatra i sustav

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c,$$

ili sustav

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=a, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=b, \quad \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=c.$$

Ovi sustavi jednadžbi rješavaju se slično kao prethodni. Na taj način učenici uče *sastavljati* i rješavati nove zadatke primjenom *analogije*.

B) Vrste zadataka

Prema složenosti i težini zadaci se dijele u sljedeće dvije velike skupine: *standardni zadaci* i *nestandardni zadaci*.

Standardni zadaci. To su zadaci kod kojih nema nepoznatih sastavnica: uvjeti su postavljeni jasno i precizno, cilj je očigledan, teorijska osnova se lako uočava i bez dublje analize, a način rješavanja je poznat i on teče prirodno i prema očekivanjima. Oni ne doprinose mnogo razvoju kreativnih sposobnosti učenika, ali su važni kao sredstvo boljeg razumijevanja i bržeg usvajanja novih matematičkih sadržaja.

Nestandardni zadaci. To su zadaci kod kojih je bar jedna sastavnica nepoznata. Ako su nepoznate dvije ili više sastavnica, nestandardni zadaci nazivaju se još i *problemski zadaci*. Rješavanje takvih zadataka višestruko je korisno, jer ono omogućuje razvijanje logičkog mišljenja i provođenje nevelikih samostalnih istraživanja. Za njega je potreban pojačan umni napor, dublja analiza, veća koncentracija, ustrajnost i dosjetljivost. Rješavajući nestandardne zadatke učenik nauči cijeniti male pomake i čekanje ideje koja vodi do uspješnog završetka.

Nužno je razlikovati *složenost* kao objektivno svojstvo svakog zadatka i *težinu* zadatka koja odražava odnos između zadatka i onoga tko ga rješava. Jedan te isti zadatak može jednom učeniku biti lagan, a drugom izrazito težak. O čemu to ovisi? Za rješavanje nekog zadatka postavljenog određenom učeniku trebaju različite činjenice, pored ostalog i rješenja nekih zadataka koje je taj učenik ranije rješavao. Ako složenost tih zadataka nije bila zadovoljavajuća, postavljeni zadatak bit će tom učeniku težak. Prema tome, da bi se učenicima olakšalo rješavanje nekog postavljenog zadatka, odnosno smanjila njegova težina, potrebno je povećati složenost za tu svrhu potrebnih zadataka koji se ranije rješavaju. Ovo je posebno važno u radu sa slabijim učenicima.

Prema cilju zadaci se dijele u sljedeće dvije velike skupine: *odredbeni zadaci* i *dokazni zadaci*.

Odredbeni zadaci. Cilj odredbenog zadatka je nalaženje nepoznate veličine ili traženog objekta. U algebarskim zadacima nepoznata veličina obično je broj. U geometrijskim zadacima traženi objekt obično je geometrijska figura.

Dokazni zadaci. Cilj dokaznog zadatka je pokazati istinitost neke postavljene tvrdnje.

Put izgradnje svakog područja matematike zacrtan je na prirodan način. Na početku se promatra sustav osnovnih pojmova i polaznih tvrdnji. Zatim se postepeno definiraju novi pojmovi i pomoću njih i polaznih tvrdnji logičkim sredstvima izvode nove tvrdnje. Dokazane tvrdnje postaju nakon toga sastavni dijelovi svakog daljnjeg postupka dokazivanja.

Budući da su matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet usko povezani, to ovaj oblik matematičke djelatnosti, dokazivanje tvrdnji, ima svoje mjesto i u nastavi matematike. Posebno su važni geometrijski dokazi, jer oni učenicima pružaju pravu priliku upoznavanja ideje strogog zaključivanja. Matematičko obrazovanje učenika nije potpuno ako on tokom školovanja nije upoznao i shvatio nekoliko standardnih dokaza. Da se podsjetimo: dokaz neke tvrdnje znači prelaženje puta nizom logičkih zaključivanja od pretpostavke do zaključka. Što može bolje doprinijeti razvoju logičkog i matematičkog mišljenja! Otuda proizlazi važnost dokaznih zadataka u nastavi matematike. Dokazni zadaci su najčešće nestandardni zadaci. Vrlo često se zadaju na matematičkim natjecanjima.

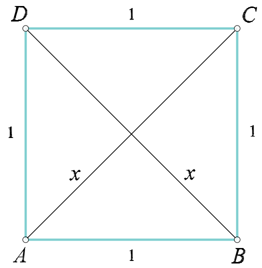
C) Zadatak u nastavi matematike

Prema mjestu i ulozi u nastavnom procesu razlikujemo nekoliko tipova nastavnih zadataka: uvodni zadaci, primjeri, zadaci za ponavljanje i uvježbavanje, zadaci za domaću zadaću, dodatni zadaci, dopunski zadaci. Opišimo ukratko ulogu svakog od njih.

Uvodni zadaci. Ovi zadaci nalaze se u udžbeniku na početku nekog odjeljka. Oni služe za uvođenje u određeni teorijski problem. Pri rješavanju nekog takvog zadatka učenici pokazuju nesigurnost, muče se i najčešće ga ne znaju do kraja riješiti. Time je svrha uvodnog zadatka zapravo postignuta! Postavljena problemska situacija ukazuje na činjenicu da bez novih znanja promatrani problem i njemu slične probleme ili nije moguće riješiti, ili je njihovo rješavanje povezano sa znatnim teškoćama, pa je to rješavanje zamorno i neracionalno. Nakon obrade novog gradiva često takvi zadaci, do tada nestandardni, odjednom postaju standardni. Naravno, nije se smanjila složenost takvih zadataka, već težina, budući da je znanje učenika podignuto na višu razinu. Prema tome, osnovni cilj uvodnih zadataka je pobuđivanje *interesa* i *motivacija* potrebe obrade novog nastavnog gradiva. Razmotrimo nekoliko uvodnih zadataka.

Zadatak 1. (Odjeljak iz programa: Drugi korijen). Nađimo duljinu dijagonale kvadrata kojemu je duljina stranice jednaka 1.

Rješenje. Neka je $ABCD$ jedinični kvadrat. Označimo sa x duljinu njegove dijagonale.



Površinu P toga kvadrata možemo izraziti na dva načina. S jedne strane je $P = 1 \cdot 1 = 1$, a s druge strane površina je jednaka zbroju površina četiri pravokutna trokuta s duljinama kateta $\frac{x}{2}$, pa se lako nalazi da je $P = \frac{x^2}{2}$. Izjednačavanjem dobivamo za x jednadžbu

$$x^2 = 2.$$

Ova jednadžba nema rješenje u skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$. Budući da veličina x očito postoji, to je ovaj zadatak lijepa motivacija potrebe proširenja skupa racionalnih brojeva, a posebno potrebe rješavanja *kvadratne jednadžbe* oblika

$$x^2 = a, \qquad a > 0$$

i uvođenja pojma drugog korijena.

* * *

Zadatak 2. (Odjeljak iz programa: Kvadratna jednadžba).

Zbroj dvaju brojeva je 1 773, a njihov umnožak 759 800. Koji su to brojevi?

Rješenje. U skupu cijelih brojeva problem bismo mogli pokušati riješiti rastavljanjem umnoška na faktore i kombiniranjem po dva faktora dok ne dobijemo zadani zbroj. Brži i sigurniji način je svođenje problema na rješavanje jednadžbi. Pogledajmo do čega će ta ideja dovesti. Označimo li tražene brojeve sa x i y, uvjeti zadatka dadu se napisati u obliku sustava jednadžbi

$$x + y = 1\,773, \qquad xy = 759\,800.$$

Supstitucijom $y = 1\,773 - x$ iz prve jednadžbe u drugu dobiva se jednadžba

$$x^2 - 1\,773x + 759\,800 = 0.$$

Došli smo do jednadžbe koju učenici ne znaju riješiti, ili možda mogu tek intuitivno naslutiti postupak rješavanja. Za njih je rješavanje gornje jednadžbe u tom trenutku nestandardni, problemski zadatak. Prema tome, ovaj *uvodni* problemski zadatak pobuđuje potrebu rješavanja jednadžbe dobivenog oblika.

Tako sada imamo motivaciju za uvođenje pojma i rješavanje *opće kvadratne jednadžbe*

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Općenito, kvadratna jednadžba nema rješenja u skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$. Najjednostavniji primjer kvadratne jednadžbe koji dokazuje valjanost te tvrdnje jest

$$x^2 + 1 = 0.$$

Postavimo li prije rješavanja kvadratne jednadžbe zahtjev da ona uvijek ima rješenja u nekom skupu brojeva, otkrili smo jednu motivaciju potrebe proširenja skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ i uvođenja *skupa kompleksnih brojeva* $\mathbf{C}$.

* * *

U nastavnoj jedinici o rješavanju kvadratne jednadžbe najprije se razmatraju posebni slučajevi $ax^2 + bx = 0$ i $ax^2 + c = 0$. Nakon obrade tih slučajeva prelazi se na rješavanje općeg slučaja $ax^2 + bx + c = 0$. Pogledajmo uvodni zadatak čije rješavanje sadrži ideju koja pomaže da se taj cilj ostvari.

Zadatak 3. (Odjeljak iz programa: Rješavanje kvadratne jednadžbe). Riješimo jednadžbe:

1) $4x^2 - 36x + 81 = 0$,

2) $x^2 + 10x + 16 = 0$,

3) $2x^2 + 5x - 1 = 0$.

Rješenje. 1) Jednadžba se može napisati u obliku $(2x - 9)^2 = 0$, pa ona očito ima dvostruko rješenje $x_1 = x_2 = \frac{9}{2}$.

2) Lijevu stranu jednadžbe nadopunjavat ćemo na potpuni kvadrat. Imamo redom

$$x^2 + 10x + 16 = 0,$$
$$(x^2 + 10x + 25) - 9 = 0,$$
$$(x + 5)^2 = 9,$$
$$x + 5 = \pm 3.$$

Rješenja jednadžbe su $x_1 = -2$, $x_2 = -8$.

3) Na lijevoj strani jednadžbe najprije izlučimo 2, a onda nadopunjavamo na potpuni kvadrat kao u 2). Imamo redom

$$2x^2+5x-1=0,$$
$$2\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)-1=0,$$
$$2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)\frac{25}{8}-1=0,$$
$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{33}{16},$$
$$x+\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4},$$
$$x_1=\frac{-5+\sqrt{33}}{4},\quad x_2=\frac{-5-\sqrt{33}}{4}.$$

Nije teško otkriti metodičke razloge i svrhu rješavanja ovih jednadžbi prije izvođenja formula za rješenja opće kvadratne jednadžbe. Potpuni kvadrat u prvoj jednadžbi ukazuje na prvi korak u rješavanju druge jednadžbe, nadopunjavanje na potpuni kvadrat, a rješavanje druge jednadžbe ukazuje na način rješavanja treće jednadžbe, gdje je prije toga potrebno samo izlučiti vodeći koeficijent. Sada primjenom *analogije* učenici mogu brže shvatiti postupak nalaženja traženih formula za rješenja opće kvadratne jednadžbe:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

* * *

Primjeri. Zadatke pod ovim nazivom susrećemo u udžbenicima gotovo u svakom odjeljku. Oni mogu biti standardni i nestandardni zadaci. Ako se primjer nalazi na početku odjeljka, onda je on posebna vrsta uvodnog zadatka kojim se razjašnjava način rješavanja nekog teoretskog pitanja. Takav karakter ima gornji zadatak 3. U ovom slučaju primjer je za učenike nestandardni zadatak. Ako se primjer nalazi pri kraju odjeljka, onda njegova uloga može biti neposredna primjena izvedenog pravila, zakona ili formule. U tom slučaju primjer je standardni zadatak. Zbog njegove jasne i važne namjene postizanja jasnoće i razumijevanja teoretskog pitanja od strane učenika, primjer objašnjava i razrješava nastavnik.

Zadaci za ponavljanje i uvježbavanje. Nakon što se primjerima postigne jasnoća obrađenog novog gradiva, potrebno je stupanj usvojenosti istog gradiva od strane učenika provjeriti rješavanjem zadataka. U početku su to jednostavni standardni zadaci. Zatim njihova težina postupno raste.

Zadaci za domaću zadaću. Budući da je zadavanje domaće zadaće posljednji dio nastavnog sata, često se dešava da zbog opsežnosti upravo obrađenog novog nastavnog gradiva nastavnik to učini brzo i bez ikakvih objašnjenja, navodeći samo brojeve zadataka iz zbirke ili udžbenika. Time se povređuju važna načela nastave matematike. Zadavanje domaće zadaće treba biti brižljivo promišljeno i pripremljeno, ali i obavljeno na primjeren način. Pod tim se podrazumijeva: nastavnikov osvrt na izbor zadataka, čitanje tekstova od strane učenika, nastavnikova pitanja o razumijevanju zadataka, objašnjenja i upute za rješavanje težih zadataka, te potpuni ili djelomični pregled i provjera rješenja zadataka na sljedećem nastavnom satu.

Rješavanje zadataka za domaću zadaću treba postati stalna navika učenika. Ta će se navika prirodnije razvijati ako se pri zadavanju domaće zadaće nastoji smanjiti faktor prisile. To se može postići primjerenijim izborom zadataka za domaću zadaću i pristupačnijim zahtjevima nastavnika. Osim tradicionalnog načina izbora obaveznih zadataka, evo još nekoliko suvremenijih mogućnosti koje nastavniku stoje na raspolaganju:

1) Izbor zadataka kojima težina postupno raste i navođenje onih koje su učenici obavezni rješavati, a koje ne.
2) Učenici samostalno biraju koje će od predloženih zadataka rješavati.
3) Učenici samostalno odabiru neke zadatke za domaću zadaću.
4) Učenici sami sastavljaju neke zadatke za domaću zadaću.

Nije potrebno posebno naglašavati koliko bi se malo drugačijim odnosom prema domaćim zadaćama postigla i bolja psihološka priprema učenika za njihovo rješavanje.

Dodatni zadaci. Nastava matematike danas je pretežno usmjerena na izvršavanje plana i opsežnog programa, a mnogi nastavnici svoj glavni zadatak vide u tome da učenici usvoje što više propisanog gradiva. U takvoj su nastavi matematike, posebno u osnovnoj školi, nerijetko zapostavljeni upravo najsposobniji učenici. Oni u početku uče s lakoćom i veseljem, a onda, budući da nisu dovoljno i primjereno opterećeni i da mogu bez napora usvojiti ono što se od njih traži, stječu pogrešan dojam da za učenje matematike i ne treba veliki napor ili postupno gube volju za učenjem. Ako nastavnik postojano ne prati i ne potiče njihov razvoj, važan će dio njihovih matematičkih sposobnosti mirovati i neće se razvijati.

Jedan jednostavan način poboljšanja rada s naprednijim učenicima su *dodatni zadaci*. To su u pravilu nestandardni zadaci. Oni mogu služiti produbljivanju gradiva koje se upravo obrađuje, ali mogu biti i izvan toga. Osnovni izvori za dodatne zadatke su zbirke zadataka, matematički časopisi i zbornici zadataka s matematičkih natjecanja. Svaki puta kad se ukaže prilika nastavnik treba naprednijim učenicima ponuditi na rješavanje dodatne zadatke. A takvih prilika uvijek ima: domaće zadaće, sat vježbanja i ponavljanja, sat provjeravanja znanja, školske zadaće i dr.

Naravno, dodatni zadaci za naprednije učenike mogu poslužiti i kao neobavezni zadaci za sve učenike, sve s ciljem povišenja uspješnosti nastave matematike.

Dopunski zadaci. Mnogi učenici imaju poteškoća u praćenju i usvajanju novog nastavnog gradiva. Razlozi su različite naravi, a rezultat najčešće praznine u znanju. Za popunjavanje tih praznina služe, pored ostalog, i *dopunski zadaci*. To su u pravilu standardni zadaci, neposredno vezani za gradivo koje učenici nisu na zadovoljavajući način usvojili.

Problemski zadaci. Već je prije rečeno da su problemski zadaci vrsta nestandardnih zadataka. Izdvojeni su posebno iz sljedećeg važnog razloga: s jedne strane, u nastavi matematike rijetko se pojavljuju, a s druge strane bez njih se ne mogu zamisliti matematička natjecanja. Dugogodišnje praćenje matematičkih natjecanja pokazuje da se i naši najbolji učenici često dobro ne snalaze u rješavanju nestandardnih i složenijih matematičkih problema i postižu slabe rezultate. Manjkaju im određena znanja, ne poznaju neke jednostavne *metode* rješavanja matematičkih problema. Posebno je uočeno slabo poznavanje analize. Istina, rješavajući raznovrsne standardne i nestandardne zadatke učenici ovladavaju sve većim znanjem i stječu sve bolje iskustvo u toj djelatnosti. Međutim, sposobnost rješavanja problemskih zadataka razvija se uspješnije i brže ako oni to ne postižu samo rješavanjem velikog broja zadataka, već upoznavanjem i usvajanjem različitih metoda rješavanja zadataka. Potvrda ove činjenice može se naći u malom izboru zadataka s natjecanja, navedenom u [3].

Zabavni zadaci. Može li se stvarno učenje matematike povezati sa zabavom? Na prvi pogled to se pitanje čini smiješnim. Matematika i zabava! Međutim, dovoljno je podsjetiti da se matematika rađala pri rješavanju praktičnih problema društva. Zato je sasvim prirodan zahtjev da školski matematički zadaci budu što više povezani s problemima iz našeg svakodnevnog života. Mi bismo još samo dodali: i na zabavan način! Zabavna matematika stvarno postoji, jedino u nastavi matematike nije još našla svoje mjesto.

Zaista je velik izbor zabavnih zadataka. Gotovo za svaku nastavnu temu može se pronaći niz zadataka koji o temi "pričaju" na zabavan način.

Kao ilustraciju navodimo dva takva zadatka, dvije različite pričice o beduinima. U prvoj se učenici na zabavan način susreću s razlomcima, a u drugoj imamo mjerenje vremena i malo logike.

Beduini i žedni putnik. Pod užarenim pustinjskim suncem tri beduina naišla su na zalutalog i žednog putnika. Prvi beduin imao je 10 litara vode, drugi 7, a treći 6. Nakon kraćeg vijećanja beduini su odlučili da svu vodu podijele na četiri jednaka dijela. Ubrzo je iscrpljeni putnik utažio žeđ. Presretan zbog neočekivanog spasa on je u znak zahvalnosti sav imetak koji je imao kod sebe, 23 zlatnika, razdijelio beduinima i to tako da je prvom beduinu dao 10 zlatnika, drugom 7, a trećem 6, smatrajući to obzirom na količine vode pravednom podjelom.

Je li ova podjela zlatnika zaista pravedna?

Rješenje. Nije. Ukupna količina vode je 23 litre. Svaki od četvorice dobio je $\frac{23}{4}$ litara vode. To znači da je zalutali putnik od prvog beduina dobio $\frac{17}{4}$, od drugog $\frac{5}{4}$, a od trećeg $\frac{1}{4}$ litre vode. Pravedna podjela je 17, 5 i 1 zlatnik.

U oazi. Dva beduina srela su se u oazi afričke pustinje i odlučila zajedno ručati. Prvi beduin imao je jedno nojevo jaje i pješčani sat u kojemu pijesak iz gornjeg dijela istekne u donji dio za 7 minuta, a drugi beduin imao je također jedno nojevo jaje i pješčani sat kod kojega istjecanje pijeska traje točno 11 minuta. Po starome beduinskom receptu, nojevo jaje je najukusnije ako se kuha točno 15 minuta. Mogu li beduini pomoću svoja dva pješčana sata kuhati jaja koliko zahtijeva recept?

Rješenje. Mogu. Na početku kuhanja treba pustiti u rad oba pješčana sata. Po isteku 7 minuta okrene se prvi pješčani sat, a po isteku 11 minuta okrene se isti pješčani sat ponovo i pijesak iz njegova gornjeg dijela curit će u donji dio još točno potrebne 4 minute.

* * *

Očito da ova dva zabavna zadatka imaju, osim svoga matematičkog sadržaja, i jedan drugi koji je usko povezan sa svakidašnjim životom jednog nama egzotičnog kraja. Tekstovi tih zadataka bude pred očima rješavatelja niz neobičnih slika: Afrika, pustinja, beduini, deve, nojevi, vreli pijesak, žarko sunce. Može li ovakva zamjena suhoparnog teksta u nekom matematičkom zadatku sa živopisnim i zanimljivim tekstom pobuditi veći interes za rješavanje matematičkih zadataka, a samim time i veći interes za matematiku? Zacijelo da može. Zato je poželjno obogatiti nastavni proces i ovakvom vrstom zadataka.

D) Izbor zadataka

Osnovno pitanje koje se javlja pri razmatranju uloge zadataka u nastavi matematike je izgradnja primjerenog sustava zadataka pomoću kojega se učenici trebaju upoznati sa svim opisanim oblicima matematičke djelatnosti (stvaranje problemskih situacija, motivacija nužnosti proširivanja teorije, pronalaženje matematičkih modela praktičnih problema, rješavanje zadataka, dokazivanje tvrdnji i dr.).

Na to pitanje trebaju u prvom redu odgovoriti pisci udžbenika i sastavljači zbirki zadataka. No, pri rješavanju istog problema značajnu, rekli bismo i presudnu ulogu ima nastavnik matematike. Kakvo je stanje u tom pogledu danas? Možemo li biti zadovoljni? Ono što svakako treba istaknuti kao napredak jest činjenica da danas imamo za svaki razred više udžbenika i zbirki zadataka, što bi s vremenom kroz nastavnu praksu trebalo rezultirati pozitivnom selekcijom i odabirom najboljih. Zbirke zadataka su sadržajno bogate. Ali .... Većina zadataka u udžbenicima i zbirkama često je slabo međusobno povezana. Njihova je uloga vrlo uska. Oni obično služe za ilustraciju primjene nekog konkretnog pravila, zakonitosti, formule. Kada su toj svrsi poslužili, njih se brzo zaboravlja. Međutim, neki zadatak ne bi smio biti sam sebi svrha, već bi, nadovezujući se na prethodne zadatke, trebao dati nešto novo, bar mali pomak u mišljenju. S druge strane, i takvi zadaci pružaju ponekad mogućnost usmjeravanja mišljenja učenika u nekom drugom pravcu i postavljanja dodatnih pitanja kojima se širi njihova uloga. Kreativan nastavnik neće propustiti takvu mogućnost. Na žalost, najčešća je situacija da nastavnik matematike u svojoj pripremi nastavnog sata traži samo brzo rješenje postavljenog zadatka i nije zamislio nikakva dodatna pitanja.

Današnje stanje u vezi s matematičkim zadacima karakteriziraju tri izrazite slabosti:

1) Standardizacija sadržaja i metoda rješavanja zadataka.
2) Neusklađenost postavljanja i rješavanja zadataka sa zakonitostima matematičkog mišljenja.
3) Nerazvijenost metodike rješavanja zadataka.

E) Metodika rješavanja zadataka

Pitanje pronalaženja što općenitijih metoda rješavanja problema je vrlo staro. Veliki francuski matematičar, fizičar i filozof *René Descartes* (1596. – 1650.), kao što je opisano u [2] i [3], tragao je u svojim istraživanjima za *univerzalnom metodom* rješavanja problema, zasnovanoj na ideji da se bilo koji problem može svesti na rješavanje jednadžbi. Descartesova zamisao vrlo plodno se ostvaruje za mnoštvo raznorodnih problema u raznim područjima, pa tako i u školskoj matematici, naročito pri rješavanju tekstualnih i konstruktivnih zadataka. Jedno je ipak jasno: univerzalna metoda ne može postojati. Umjesto toga, za široke klase problema uvode se i razvijaju posebne metode rješavanja. Međutim, za mnoge probleme ni to nije moguće učiniti. Zato je u metodici nastave matematike izrasla i neprestano se razvija posebna metodika, *metodika rješavanja zadataka*. Njezino središnje pitanje je: kako naučiti učenike rješavati zadatke? A jedan od njezinih glavnih ciljeva je: naučiti učenike prepoznavati zadatke iz iste klase. Ona pomaže da se proces rješavanja bilo kojeg zadatka svede na što je moguće manji broj nepoznanica i na taj način podigne razina uspješnosti rješavanja.

Danas je uobičajeno da se proces rješavanja zadataka dijeli u četiri etape:

1) Razumijevanje zadatka.
2) Stvaranje plana.
3) Izvršavanje plana.
4) Osvrt.

Razrada ovog općeg pristupa rješavanju zadataka s nizom korisnih uputa, usmjeravajućih pitanja i logičkih rasuđivanja može se naći u izvrsnoj knjižici američkog matematičara i metodičara *Georga Polye* [5].

* * *

Napomena. S obzirom na postavljeni cilj članka, mnoga pitanja u vezi s matematičkim zadatkom u njemu su samo naznačena. To se prije svega odnosi na izbor zadataka, metode rješavanja zadataka, problemske zadatke na matematičkim natjecanjima, zadatke u zabavnoj matematici i samu metodiku rješavanja zadataka, koja je u našoj nastavnoj praksi prilično zapostavljena. Važnost ovog područja za nastavu matematike zahtijeva da se ta i druga pitanja obrade kao posebne teme.

Literatura

[1] B. Dakić, *Matematički zadatak i njegova uloga u nastavi matematike*, Matematika 4 (1982), 26–34.

[2] Z. Kurnik, *Descartesova metoda — problemi i jednadžbe*, , Matematika i škola 1 (1999), 10–17.

[3] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike, 187–201.

[4] V. A. Oganesjan i dr., *Metodika prepodavanija matematiki v srednej škole*, Prosveščenie, Moskva 1980.

[5] G. Polya, *Kako ću riješiti matematički zadatak* (prijevod s engleskog), Školska knjiga, Zagreb 1956.

[6] ...... *Standardi za nastavu matematike*, Matkina biblioteka, HMD i V. gimnazija, Zagreb 2000.

Kalendar natjecanja

Natjecanja u matematici učenika osnovnih i srednjih škola u 2001. godini planiraju se održati prema sljedećem vremenskom rasporedu:

— *školska natjecanja:*	*do 3. veljače;*
— *općinska (gradska) natjecanja:*	*2. ožujka;*
— *županijska natjecanja:*	*6. travnja;*
— *državno natjecanje:*	*9. – 12. svibnja;*
— *regionalna natjecanja:*	*druga polovina svibnja.*